

- 
- 
- 

# Modelos populacionais matriciais - Roteiro em R

## Matriz de Leslie/Leftkovich



O crescimento de uma população com estrutura etária pode ser projetado utilizando-se álgebra matricial. As matrizes de Leslie contêm informação sobre as taxas de natalidade e mortalidade de diferentes classes etárias de uma população e são uma forma robusta de calcular o crescimento populacional e fazer projeções da população para diferentes cenários. Uma generalização da matriz de Leslie ocorre quando a população é classificada por estádios de desenvolvimento (matriz de Leftkovich), e não por idade. Neste caso, um indivíduo de uma dada classe pode, além de morrer, crescer e reproduzir, permanecer no mesmo estágio a cada intervalo de tempo. Nessa generalização, as taxas vitais básicas (crescimento, sobrevivência e reprodução) estão embutidas nos valores das matrizes de transição, onde computamos o efeito que o número de indivíduos em cada classe estado exerce nas outras no intervalo de tempo seguinte.

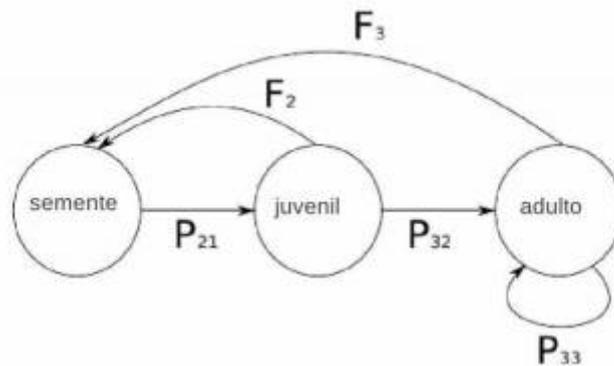
## Objetivo

O objetivo desse exercício é entender como podemos tratar populações estruturadas com estes modelos matriciais. Vamos começar com multiplicação de matrizes e análises de autovalor e autovetor!

## Entrando na matriz...



Vamos imaginar que coletamos em campo dados de uma população de palmeiras. Encontramos que a população é estruturada nos estágios: semente (F1), juvenil (F2) e adulto (F3). Imagine que 50% dos jovens sobreviveram e tornaram-se adultos, 90% dos adultos sobreviveram e que a cada 100 sementes encontradas, foram encontrados 30 juvenis. Ainda, estimamos a produção de sementes por indivíduos juvenis em 0,5 e por adultos em 20. Ou seja:



A partir dos dados obtidos podemos construir a nossa matriz de Leslie para a população em questão.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & F_2 & F_3 \\ P_{21} & 0 & 0 \\ 0 & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 20 \\ 0.30 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0.90 \end{pmatrix}$$

Num censo de número de indivíduos do sistema de estudo encontramos: 100 sementes, 250 juvenis e 50 adultos. O que nos dá um vetor de  $N(t)$  na condição inicial.

Vamos então fazer as projeções para esta população. No R, quando queremos fazer operações matriciais temos uma notação específica, para multiplicação de matriz, por exemplo usamos a notação `%*%`. E pronto! Ele faz a operação conforme as regrinhas matemáticas para isso.

```
# matriz de leslie
A <- matrix(c(0, 0.5, 20, 0.3, 0, 0, 0, 0.5, 0.9), nr = 3, byrow = TRUE)
A
# vetor de N iniciais da populacao
N0 <- matrix(c(100, 250, 50), ncol = 1)
```

Para fazermos a projeção da população para o tempo (em anos) seguinte:  $N(t+1) = A \cdot N(t)$

```
N1 <- A %*% N0
N1
```

Agora podemos projetar para um intervalo de tempo maior e ver o que acontece.

```
anos <- 10
N.projecoes <- matrix(0, nrow = nrow(A), ncol = anos+1)
N.projecoes[, 1] <- N0
```

```

for (i in 1:anos)
{
  N.projecoos[, i + 1] <- A %**% N.projecoos[,i]
}

par(mfrow=c(1,2))
matplot(0:anos, t(N.projecoos), type = "l", lty = 1:3, ylab = "n(t)", xlab =
"Tempo (t)", xlim=)
legend("topleft", legend = c("Sementes", "Juvenil", "Adulto"),lty = 1:3, col
= 1:3, bty = "n")
matplot(0:anos, log(t(N.projecoos)), type = "l", lty = 1:3, ylab = "n(t)",
xlab = "Tempo (t)", xlim=)
legend("topleft", legend = c("Sementes", "Juvenil", "Adulto"),lty = 1:3, col
= 1:3, bty = "n")
par(mfrow=c(1,1))

```

#### Exercício 1: Interpretando os gráficos

- A projeção observada no gráfico (a) é condizente com o esperado pelo modelo de crescimento estruturado?
- Como você interpretaria o padrão observado no gráfico (b).

## Uma ajuda

Abaixo uma tem uma função para projetar populações a partir da matriz de transição e do estado inicial (tmax é o tempo máximo de projeção). É basicamente o que fizemos anteriormente, mas agora com a ajuda da função.

#### Função proj.mat

```

#####
## Projeção Matricial
#####
proj.mat<-function(n0, matproj, tmax)
{
  res.mat<-matrix(NA,nrow=tmax+1,ncol=length(n0))
  res.mat[1,]<-n0
  for(i in 2:(tmax+1))
  {
    res.mat[i,]=matproj %**% res.mat[(i-1),]
  }
  return(res.mat)
}
#####
## rodando a função ##
#####
nEst<-proj.mat(n0=N0, matproj=A , tmax=10)
matplot(1:11, nEst, type="l")
#####
# tamanho da população ##
#####

```

```
nPop<-apply(nEst,1, sum)
plot(1:11, nPop)
```

## Taxa de Crescimento

$$\lambda = \frac{N_t}{N_{t-1}}$$

Vamos ver como a taxa de crescimento se comporta!

```
#####
# Crescimento da População ##
#####
lambPop<-nPop[2:11]/nPop[1:10]
matplot(1:10, lambPop, type="b", pch=1)
```

Exercício

OK! Agora vamos fazer um exercício!

- projete a população a tempos mais longos!
- veja como se comporta a taxa de crescimento da população  $\lambda = \frac{N_t}{N_{t-1}}$
- faça o mesmo variando algum parâmetro da matriz de transição
- como se comporta essa taxa ao longo do tempo? Ele muda (qualitativamente) quando muda algum parâmetro da população (transições, estado inicial)?

## Distribuição de Estádios

Uma característica importante da população é a distribuição relativa dos estádios em relação ao total de indivíduos da população. Será que a importância (proporção de indivíduos) de um estágio pode variar ao longo da trajetória da população? Vamos ver?!

```
#####
# proporção das classes ##
#####
propEst<-nEst/nPop
matplot(1:11, propEst, type="l")
```

Exercício

1. Qual a contribuição, em proporção de indivíduos, de cada classe (estádio) para o tamanho total da população a cada tempo?
2. Essa contribuição das classes varia ao longo do tempo?
3. Ilustre sua resposta com projeções de populações e gráficos dessas simulações.

- 4. Calcule a taxa de crescimento da população a cada intervalo de tempo e faça o gráfico dessa taxa ao longo do tempo.

Exercício (de novo?!?)

- De novo, aumente o tempo da simulação para ver o que acontece
- modifique os parâmetros da matriz de transição e do estado inicial para ver se a trajetória se modifica e quais as semelhanças qualitativas do comportamento.

## Análise de Perturbação

Podemos inferir a contribuição de cada elemento da matriz de transição para a composição da taxa de crescimento populacional através de análises de perturbação da matriz. A lógica é bastante intuitiva: se modificarmos uma das transições, mantendo todos os outros elementos da matriz constante, a variação no  $\lambda$  será um reflexo da variação do elemento que modificamos. Desse modo, podemos analisar a contribuição de cada transição e consequentemente das taxas vitais em cada estágio para o crescimento da população. Na matriz do nosso exemplo a transição (no caso permanência) na fase de adulto é correspondente à taxa vital de sobrevivência nesse estágio. Podemos então fazer a seguinte pergunta:

- **Se algum fator afetar a probabilidade de sobrevivência do adulto, qual seria o efeito para a população?**

**Vamos responder essa pergunta?**

```
#####
## Perturbando a sobrevivência do adulto ##
#####
pert=seq(0,1, by=.05)
resAd=rep(NA, length(pert))
names(resAd)<-paste("p", pert, sep="_")
for(i in 1:length(resAd))
{
  Ai<-A
  Ai[3,3]<-pert[i]
  projAi= proj.mat(n0=N0,matproj=Ai, tmax=100)
  nAi=apply(projAi, 1, sum)
  lambi=nAi[101]/nAi[100]
  resAd[i]<-lambi
}
resAd
```

Exercício

- 1. A sobrevivência do adulto tem muita influência no destino da

- população?
- 2. Se você fosse pensar em uma extração sustentável dessa população, como você poderia usar esta análise para fazer alguma recomendação para o manejo?
  - 3. A extinção da população é imediata quanto a taxa de sobrevivência de adultos é zero?
  - 4. Faça o mesmo para a transição de sementes para juvenil e compare com a sobrevivência do adulto. Qual transição é mais importante para o destino da população?
  - 5. A proporção dos estádios em relação ao total da população é diferente entre cenários da matriz com perturbação e da matriz original?

## Para saber mais

Gotelli, N. J. 2007. Ecologia. Cap.3- Crescimento Populacional Estruturado. Pp. 49-82. Ed. Planta.

Gurevitch, J, Scheiner, S.M, Fox, G.A. 2009. Ecologia Vegetal. Cap. 5 - Ed. Artmed, São Paulo.

[An Intuitive Guide to Linear Algebra](#), do excelente site [Better explained](#).

Freckleton, R.P., Silva Matos, D.M., Bovi, M.L.A & Watkinson, A.R. 2003. Predicting the impacts of harvesting using structured population models: the importance of density-dependence and timing of harvest for a tropical palm tree. *Journal of Applied Ecology*, 40: 846-858.

Silva Matos, D.M., Freckleton, R.P. & Watkinson, A.R. 1999. The role of density dependence in the population dynamics of a tropical palm. *Ecology*, 80: 2635-2650.

## Programas

Neste roteiro fizemos os cálculos passo a passo e com algumas aproximações numéricas para compreender os conceitos. Na vida real pesquisadores usam ferramentas computacionais que fazem os cálculos precisos e de um jeito mais prático. Para saber mais veja a apresentação ao pacote [popbio](#) do ambiente de programação estatística [R](#):

- Stubben, C., & Milligan, B. (2007). Estimating and analyzing demographic models using the popbio package in R. *Journal of Statistical Software*, 22(11), 1-23.

[R, uma população, população estruturada](#)

From:  
<http://ecovirtual.ib.usp.br/> -

Permanent link:  
[http://ecovirtual.ib.usp.br/doku.php?id=ecovirt:roteiro:pop\\_str:pstr\\_mtr&rev=1628284908](http://ecovirtual.ib.usp.br/doku.php?id=ecovirt:roteiro:pop_str:pstr_mtr&rev=1628284908)

Last update: **2021/08/06 18:21**