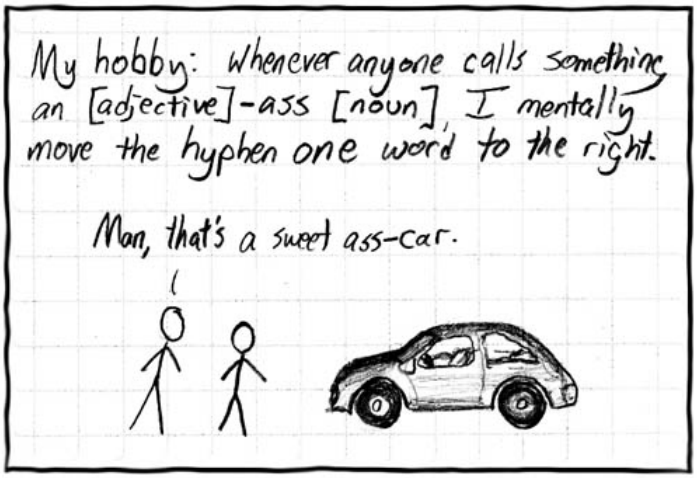
Efeito Allee e estados alternativos



No modelo logístico de crescimento populacional, basta que a população seja maior que zero para que cresça até a capacidade de suporte. No entanto, muitas populações não são viáveis abaixo de um tamanho mínimo. Isso pode acontecer pela necessidade de interações sociais, ou porque a mera agregação no espaço aumenta as chances de sobrevivência.

Neste roteiro você verá como uma modificação simples da equação logística cria um modelo para descrever o efeito Allee. Verá também que esse novo modelo tem mais de um ponto de equilíbrio estável.

O modelo

A equação logística de dinâmica populacional é normalmente expressa assim:

$$\begin{equation} \label{eq:logistica} \frac{dN}{dt} ~ = ~ rN \left(1- \frac{N}{K} \right) \end{equation}$$

Onde

- N = tamanho populacional no instante de tempo t
- r = taxa intrínseca de crescimento populacional
- K = capacidade de suporte

O efeito Allee pode ser incluído como mais um termo no modelo logístico:

$$\begin{equation} \label{eq:allee} \frac{dN}{dt} ~ = ~ rN \left(1- \frac{N}{K} \right) \left(\frac{N}{a}-1\right) \end{equation}$$

Onde a é o tamanho mínimo para que a população seja viável.

Pontos de equilíbrio

Abaixo você verá gráfico interativo [1)] da velocidade de crescimento da população ($V=dN/dt$) em função do tamanho da população com efeito Allee (equação $\ref{eq:allee}$).

Clique em `Evaluate` e você terá um menu para alterar os parâmetros do modelo. A opção `Evaluation point` define um ponto de tangência da curva de velocidade em função de N. A tangente à curva nesse ponto é a derivada da velocidade em função do tamanho populacional (dV/dN [2)]), avaliada nesse ponto.

Os tamanhos populacionais em equilíbrio são aqueles em que a velocidade de crescimento é nula. Estes pontos são estáveis se a derivada dV/dt nesse ponto é negativa [3)].

Perguntas

1. Quais são os pontos de equilíbrio?
2. Algum dos pontos de equilíbrio são estáveis?
3. Quais são as diferenças quanto aos pontos de equilíbrio e sua estabilidade em relação ao modelo logístico?

Estabilidade local e resiliência

As derivadas da velocidade de crescimento nos pontos já nos indicam quais são localmente estáveis [4)]. Mas essa análise não informa sobre se há resiliência, que é capacidade do sistema retornar a um ponto de equilíbrio após uma perturbação não-infinitesimal.

Vamos usar uma simulação numérica da equação $\ref{eq:allee}$ para avaliar a estabilidade local e a resiliência dos pontos de equilíbrio. Clique no botão `Evaluate` abaixo para iniciar.

Um menu de opções vai se abrir, com o qual você pode alterar os parâmetros do modelos e também perturbar a população com adição ou morte de até 20 indivíduos. A opção `Disturb` define o tamanho da perturbação e a opção `Disturb time` o momento em que ela ocorre.

Perguntas

1. Verifique a estabilidade local de cada um dos pontos de equilíbrio: use o valor de equilíbrio como valor inicial da população ($N0$) e faça uma pequena perturbação positiva e negativa [5)].
2. Verifique a resiliência dos pontos de equilíbrio localmente estáveis. Use o valor de equilíbrio dos estáveis como valor inicial da população ($N0$) e faça perturbações positivas e negativas crescentes.
3. Quais parâmetros afetam a resiliência de cada ponto estável? É possível aumentar a resiliência dos dois pontos ao mesmo tempo? Há uma situação biologicamente realista em que isso aconteça?

Estados alternativos e transições bruscas

Nosso modelo tem pontos de eqilíbrio localmente estáveis separados por um ponto instável. Portanto, o sistema tem **estados alternativos**. Além disso, esses estados alternativos têm uma certa resiliência, até uma certa intensidade de perturbação o sistema retorna ao mesmo estado.

Essas características fazem com que esse modelo de população esteja sujeito a **transições bruscas de estado**. Uma causa pode ser uma perturbação intensa o suficiente para provocar a mudança, como você experimentou na seção anterior. Mas essa seria uma causa brusca [6)] para uma mudança brusca.

Muito mais perturbador (😎) é a possibilidade de uma alteração gradual causar uma transição brusca. Em outras palavras, isso implicaria que o sistema tem um *limiar*, que é um tipo de resposta não-linear a mudanças ambientais.

Em nosso modelo uma transição brusca pode acontecer se uma mudança gradativa ambiental altera o valor de equilíbrio instável, que é o tamanho mínimo de uma população viável. Por exemplo, imagine que as condições ambientais se degradem, fazendo com que populações antes viáveis agora sejam pequenas demais para persistir. Em nosso modelo isso equivale a elevar o valor do parâmetro a.

Exercício

Clique em `Evaluate` abaixo para abrir dois gráficos interativos. Você verá dois gráficos:

- O gráfico da esquerda mostra a variação do tamanho populacional (N) ao longo do tempo (t), para uma população que está na capacidade de suporte. A linha azul neste primeiro gráfico é o tamanho populacional. A linha vermelha pontilhada é o tamanho mínimo para uma população viável (parâmetro a do modelo).
- O gráfico da direita mostra a velocidade de crescimento (V) da população em função de qualquer tamanho populacional possível (isto é, entre zero e K).

Use os gráficos interativos para simular uma mudança ambiental que aumente o tamanho mínimo para uma população ser viável. Para isso, defina a taxa de crescimento r, a capacidade de suporte K e o tamanho mínimo viável a. Aumente gradativamente o valor de a e observe o comportamento dos gráficos. Preste atenção às mudanças nos dois gráficos quando o sistema está próximo da transição de estados.

Para saber mais

- Allee W. C. 1931. Animal aggregations, a study in general sociology. Chicago University Press.
- Drake, J. M. & Kramer, A. M. (2011) Allee Effects. Nature Education Knowledge 3(10):2. *Revisão didática e completa*.
- Dai L, Vorselen D, Korolev KS, Gore J. 2012. Generic indicators for loss of resilience before a tipping point leading to population collapse. Science. Jun 1;336(6085):1175-7. *Um experimento engenhoso demonstra efeito Allee e suas consequências em leveduras*.
- Beisner, B. E. (2012) Alternative Stable States. Nature Education Knowledge 3(10):33

1)

usando o ambiente Sage notebook, executado remotamente no servidor Sage Cell Server.

2)

não confunda com dN/dt

3)

detalhes no roteiro sobre análise de equilíbrio e estabilidade.

4)

ou seja, resistem a pequenas perturbações, veja aqui.

5)

A interface permite uma perturbação mínima de 0,5. Funciona para este exercício, apesar da análise de estabilidade local usar perturbações inifinitesimais.

6)

perturbação intensa e instantânea

BASE

Caminhada aleatória: o bêbado e o abismo

Imagine um bêbado andando sempre para frente em uma enorme planície, mas que tem um abismo em um dos lados. A cada passo para frente, ele cambaleia um certo número de passos para a direção do abismo ou da planície, com igual probabilidade.

Este é um dos processos Markovianos mais simples, chamado caminhada aleatória (random walk) em uma dimensão [133)]. Se o bêbado cai no abismo a caminhada acaba (e o bêbado também), uma condição que chamamos de fronteira de absorção (*absorbing boundary*).

Parâmetros

Parâmetros da simulação:

Opção	Parâmetro	O que faz
`Number of Species`	S	número de bêbados
`Step Size`	step	número de passos para o lado que cada bêbado dá a cada instante de tempo
`Maximum Initial Distance`	x1max	máximo de distância dos bêbados ao abismo no início da simulação
`Initial Distance Equal`	alleq=TRUE	**selecionado TRUE**: todos os bêbados com posição inicial igual a `Maximum Initial Distance` **não selecionado FALSE**: a posição inicial dos bêbados é um valor sorteado no intervalo 1 até `Maximum Initial Distance`, com igual probabilidade.
`Maximum time`	tmax	tempo total da simulação (medido em número de passos para frente)

Exemplo de uso

Vamos soltar dez bêbados, que cambaleiam 10 passos a cada intervalo, por dez mil intervalos de

tempo. Use os parâmetros:

- S =10
- step = 10
- x1max = 100
- alleq = TRUE
- tmax = 500

Como em todo processo estocástico, os resultados variam a cada realização. Por isso repita a simulação para se assegurar que entendeu os resultados. Você pode fazer isso repetindo muitas vezes com dez bêbados, ou simplesmente aumentando o número de bêbados, já que que são independentes.

Efeito do passo

O que acontece se deixamos os bêbados um pouco menos cambaleantes? Experimente reduzir para dois os passos laterais:

- S = 10
- step = 2
- x1max = 100
- alleq = TRUE
- tmax = 500

Efeito do tempo

Bêbados que balançam menos estão menos sujeitos a terminar no abismo, ou é apenas uma questão de tempo? Certifique-se disto aumentando o número de intervalos de tempo:

- S = 10
- step = 2
- x1max = 100
- alleq = TRUE
- tmax = 1000

Pergunta

O bêbado tem igual probabilidade de cair para a direita e para esquerda, portanto ele anda em linha reta, na média. Esta caminhada aleatória equiprovável com fronteira de absorção tem um único desfecho, dado tempo suficiente. Qual é?

Populações virtuais

O mesmo modelo de caminhada aleatória pode ser aplicado à dinâmica de populações sob estocasticidade demográfica. Se supomos tempo contínuo, a qualquer momento cada população pode perder um indivíduo por uma morte, ou ganhar um por nascimento. Assim, as probabilidades de nascimentos e mortes por tempo são funções das taxas instantâneas de nascimentos b e mortes d. Se as duas taxas são iguais, por exemplo, a probabilidade de uma morte é igual à de um nascimento.

A taxa instantânea de crescimento é a diferença entre taxas de nascimentos e mortes ($r=b-d$). A unidade de tempo de r dá a escala de tempo da dinâmica, usada no parâmetro `Maximum time`.

Parametros estocasticidade

As opções controlam simulações de populações sob caminhada aleatória em tempo contínuo:

Opção	Parâmetro	Definição
`Enter name for last simulation data set`	objeto no R	nome para salvar os resultados da simulação em um objeto no R
`Maximum time`	tmax	tempo máximo da simulação na escala de tempo das taxas
`Number of simulations`	nsim	número de populações a simular
`Initial size`	N0	tamanho inicial das populações
`birth rate`	b	taxa instantânea de nascimentos (b)
`death rate`	d	taxa instantânea de mortes (d)

Um exemplo

Simule a trajetória de 20 populações em que as taxas de mortes e nascimentos sejam iguais, e que começam todas com 10 indivíduos. Deixe o tempo passar até 50 unidades. Para isso mude as opções de simulação para os valores a seguir. Você deve ver um gráfico de caminhada aleatória muito parecido com o dos bêbados. O número de populações extintas até `Maximun time` está indicado no canto superior esquerdo do gráfico.

- tmax = 50
- nsim = 20
- N0 = 10
- b = 0.2
- d = 0.2

pop Perguntas

1. A qual parâmetro da simulação da caminhada do bêbados corresponde cada parâmetros da

dinâmica estocástica de nascimentos e mortes?
2. Os efeitos do passo e do tempo observados na simulação dos bêbados valem para as simulações das populações?
3. Que consequências esses resultados têm para a conservação e manejo de populações?

Para saber mais

- Aqui simulamos uma dinâmica equiprovável de nascimentos e mortes com barreira de absorção. Este é um caso particular de processos estocásticos de nascimentos e mortes. Você encontra mais sobre eles na seção de crescimento denso-independente com estocasticidade demográfica.
- Chemotaxis - How a Small Organism Finds a Food Source: com excelente explicação sobre caminhadas aleatórias e sua aplicação em outra área da biologia. Projeto de alunos do MIT.

133)

como o bêbado dá sempre um passo adiante, apenas o deslocamento lateral é aleatório, e é o que nos interessa aqui. Usamos os passos para frente como medida de tempo

Caminhada aleatória: o bêbado e o abismo - Roteiro no R

Imagine um bêbado andando sempre para frente em uma enorme planície, mas que tem um abismo em um dos lados. A cada passo para frente, ele cambaleia um certo número de passos para a direção do abismo ou da planície, com igual probabilidade.

Este é um dos processos Markovianos mais simples, chamado caminhada aleatória (random walk) em uma dimensão [134)]. Se o bêbado cai no abismo a caminhada acaba (e o bêbado também), uma condição que chamamos de fronteira de absorção (*absorbing boundary*).

Para prosseguir você deve ter o ambiente **R** com o pacote **Ecovirtual** instalado e carregado. Se você não tem e não sabe como ter, consulte a página de Instalação.

Depois de instalar o pacote, execute o R e carregue o pacote copiando o comando abaixo para a linha de comando do R:

```
library(EcoVirtual)
```

Bebuns virtuais

O que podemos prever deste processo? Vamos soltar alguns bêbados neste mundo virtual. Para isto usaremos a função `randWalk` do pacote EcoVirtual, que tem os parâmetros a seguir.

Parâmetros da simulação:

- http://ecovirtual.ib.usp.br/

Opção	Parâmetro	O que faz
`Number of Species`	S	número de bêbados
`Step Size`	step	número de passos para o lado que cada bêbado dá a cada instante de tempo
`Maximum Initial Distance`	x1max	máximo de distância dos bêbados ao abismo no início da simulação
`Initial Distance Equal`	alleq=TRUE	**selecionado TRUE**: todos os bêbados com posição inicial igual a `Maximum Initial Distance` **não selecionado FALSE**: a posição inicial dos bêbados é um valor sorteado no intervalo 1 até `Maximum Initial Distance`, com igual probabilidade.
`Maximum time`	tmax	tempo total da simulação (medido em número de passos para frente)

Exemplo de uso

Vamos soltar dez bêbados, que cambaleiam 10 passos a cada intervalo, por dez mil intervalos de tempo. Use os parâmetros:

- S =10
- step = 10
- x1max = 100
- alleq = TRUE
- tmax = 500

Como em todo processo estocástico, os resultados variam a cada realização. Por isso repita a simulação para se assegurar que entendeu os resultados. Você pode fazer isso repetindo muitas vezes com dez bêbados, ou simplesmente aumentando o número de bêbados, já que que são independentes.

Para fazer essa primeira simulação, copie o comando abaixo e cole-o na linha de comando do R:

```
randWalk(S=10, step=10, x1max=200, alleq=TRUE, tmax=1e4)
```

Efeito do passo

O que acontece se deixamos os bêbados um pouco menos cambaleantes? Experimente reduzir para dois os passos laterais:

- S = 10
- step = 2
- x1max = 100
- alleq = TRUE
- tmax = 500

Para essa simulação, copie o comando abaixo e cole-o na linha de comando do R:

```
randWalk(S=10, step=2, x1max=200, alleq=TRUE, tmax=1e4)
```

Efeito do tempo

Bêbados que balançam menos estão menos sujeitos a terminar no abismo, ou é apenas uma questão de tempo? Certifique-se disto aumentando o número de intervalos de tempo:

- S = 10
- step = 2
- x1max = 100
- alleq = TRUE
- tmax = 1000

Para essa simulação, copie o comando abaixo e cole-o na linha de comando do R:

```
randWalk(S=10, step=2, x1max=200, alleq=TRUE, tmax=5e4)
```

Questão

O bêbado tem igual probabilidade de cair para a direita e para esquerda, portanto ele anda em linha reta, na média. Esta caminhada aleatória equiprovável com fronteira de absorção tem um único desfecho, dado tempo suficiente. Qual é?

Populações virtuais

O mesmo modelo de caminhada aleatória pode ser aplicado à dinâmica de populações sob estocasticidade demográfica. Se supomos tempo contínuo, a qualquer momento cada população pode perder um indivíduo por uma morte, ou ganhar um por nascimento. Assim, as probabilidades de nascimentos e mortes por tempo são funções das taxas instantâneas de nascimentos b e mortes d. Se as duas taxas são iguais, por exemplo, a probabilidade de uma morte é igual à de um nascimento.

A taxa instantânea de crescimento é a diferença entre taxas de nascimentos e mortes ($r=b-d$). A unidade de tempo de r dá a escala de tempo da dinâmica, usada no parâmetro `Maximum time`.

Para simular esta dinâmica estocástica de nascimentos e mortes no **EcoVirtual**, utilize a função **estDem**.

As opções controlam simulações de populações sob caminhada aleatória em tempo contínuo:

Opção	Parâmetro	Definição
`Enter name for last simulation data set`	objeto no R	nome para salvar os resultados da simulação em um objeto no R
`Maximum time`	tmax	tempo máximo da simulação na escala de tempo das taxas
`Number of simulations`	nsim	número de populações a simular
`Initial size`	N0	tamanho inicial das populações

Opção	Parâmetro	Definição
`birth rate`	b	taxa instantânea de nascimentos (b)
`death rate`	d	taxa instantânea de mortes (d)

Um exemplo

Simule a trajetória de 20 populações em que as taxas de mortes e nascimentos sejam iguais, e que começam todas com 10 indivíduos. Deixe o tempo passar até 50 unidades. Para isso mude as opções de simulação para os valores a seguir. Você deve ver um gráfico de caminhada aleatória muito parecido com o dos bêbados. O número de populações extintas até `Maximun time` está indicado no canto superior esquerdo do gráfico.

- tmax = 50
- nsim = 20
- N0 = 10
- b = 0.2
- d = 0.2

Para isso, copei o comando abaixo e cole na linha de comando do R:

```
estDem(N0=10, b=0.2, d=0.2, tmax=50, nsim=20)
```

Questões

1. A qual parâmetro da simulação da caminhada do bêbados corresponde cada parâmetros da dinâmica estocástica de nascimentos e mortes?
2. Os efeitos do passo e do tempo observados na simulação dos bêbados valem para as simulações das populações?
3. Que consequências esses resultados têm para a conservação e manejo de populações?

Para saber mais

- Aqui simulamos uma dinâmica equiprovável de nascimentos e mortes com barreira de absorção. Este é um caso particular de processos estocásticos de nascimentos e mortes. Você encontra mais sobre eles na seção de crescimento denso-independente com estocasticidade demográfica.
- Chemotaxis - How a Small Organism Finds a Food Source: com excelente explicação sobre caminhadas aleatórias e sua aplicação em outra área da biologia. Projeto de alunos do MIT.

134)

como o bêbado dá sempre um passo adiante, apenas o deslocamento lateral é aleatório, e é o que nos interessa aqui. Usamos os passos para frente como medida de tempo

Caminhada aleatória: o bêbado e o abismo - Roteiro em R

Imagine um bêbado andando sempre para frente em uma enorme planície, mas que tem um abismo em um dos lados. A cada passo para frente, ele cambaleia um certo número de passos para a direção do abismo ou da planície, com igual probabilidade.

Este é um dos processos Markovianos mais simples, chamado caminhada aleatória (random walk) em uma dimensão [135)]. Se o bêbado cai no abismo a caminhada acaba (e o bêbado também), uma condição que chamamos de fronteira de absorção (*absorbing boundary*).

Bebuns virtuais

O que podemos prever deste processo? Vamos soltar alguns bêbados neste mundo virtual. Para isto usaremos uma função em R, cujo código segue abaixo. Copie e cole este código na linha de comando do R.

```
bebado <- function(n=1,step=1,ciclo=1e5,cont=1e3,x1=NULL){
  if(is.null(x1)){
    x1 <- sample(1:200,n,replace=TRUE)
  }
  results <- matrix(NA,nrow=1+ciclo/cont,ncol=n)
  results[1,] <- x1
  X <- x1
  for(i in 2:(1+ciclo/cont)){
    for(j in 1:cont){
      X[X<=0] <- NA
      X <- X +sample(c(step,-1*step),n,replace=T)
    }
    results[i,] <- X
```

```
  }
  results[is.na(results)] <- 0
  time <- seq(0,ciclo,by=cont)
  matplot(time,results,type="l", col=rainbow(n),lwd=2, xlab="Passos",
ylab="Distância do Abismo")
  abline(h=0,lwd=4)
}
```

Esta função tem quatro argumentos:

- `n`: Número de bêbados
- `step`: número de passos para o lado que cada bêbado dá a cada instante de tempo
- `ciclo`: tempo total da simulação (no caso é o mesmo que o número de passos para frente).
- `cont`: intervalo de registro dos dados. Este argumento serve para poupar memória, já que guardar todos os passos em simulações longas pode deixar a simulação muito lenta. Mantendo o valor *default* a posição de cada bêbado é registrada a cada 1000 intervalos de tempo.

A função sorteia a posição inicial dos bêbados entre 1 e 200 passos de distância do abismo. Vamos soltar dez bêbados, que cambaleiam 10 passos a cada intervalo, por dez mil intervalos de tempo:

```
bebado(n=10,step=10,ciclo=1e4,cont=1e3)
```

Como em todo processo estocástico, os resultados variam a cada realização. Por isso repita a simulação para se assegurar que entendeu os resultados. Você pode fazer isso repetindo muitas vezes com dez bêbados, ou simplesmente aumentando o número de bêbados, já que que são independentes.

Efeito do passo

O que acontece se deixamos os bêbados um pouco menos cambaleantes? Experimente reduzir para dois os passos laterais:

```
set.seed(42) # semente de números aleatórios
bebado(n=10,step=2,ciclo=1e4,cont=1e3)
```

Efeito do tempo

Estes bêbados que balançam menos estão menos sujeitos a terminar no abismo? Certifique-se disto aumentando o número de intervalos de tempo:

```
set.seed(42)
bebado(n=10,step=2,ciclo=5e4,cont=1e3)
```

Perguntas

1. O bêbado tem igual probabilidade de cair para a direita e para esquerda, portanto ele anda em

linha reta, na média. Esta caminhada aleatória equiprovável com fronteira de absorção tem um único desfecho, dado tempo suficiente. Qual é?

2. O mesmo modelo pode ser aplicado à dinâmica de populações sob estocasticidade demográfica. O que representaria cada um dos parâmetros da simulação neste caso?

135)

como o bêbado dá sempre um passo adiante, apenas o deslocamento lateral é aleatório, e é o que nos interessa aqui. Usamos os passos para frente como medida de tempo

Caminhada aleatória: o bêbado e o abismo - Roteiro no EcoVirtual

Imagine um bêbado andando sempre para frente em uma enorme planície, mas que tem um abismo em um dos lados. A cada passo para frente, ele cambaleia um certo número de passos para a direção do abismo ou da planície, com igual probabilidade.

Este é um dos processos Markovianos mais simples, chamado caminhada aleatória (random walk) em uma dimensão [136]. Se o bêbado cai no abismo a caminhada acaba (e o bêbado também), uma condição que chamamos de fronteira de absorção (*absorbing boundary*).

Bebuns virtuais

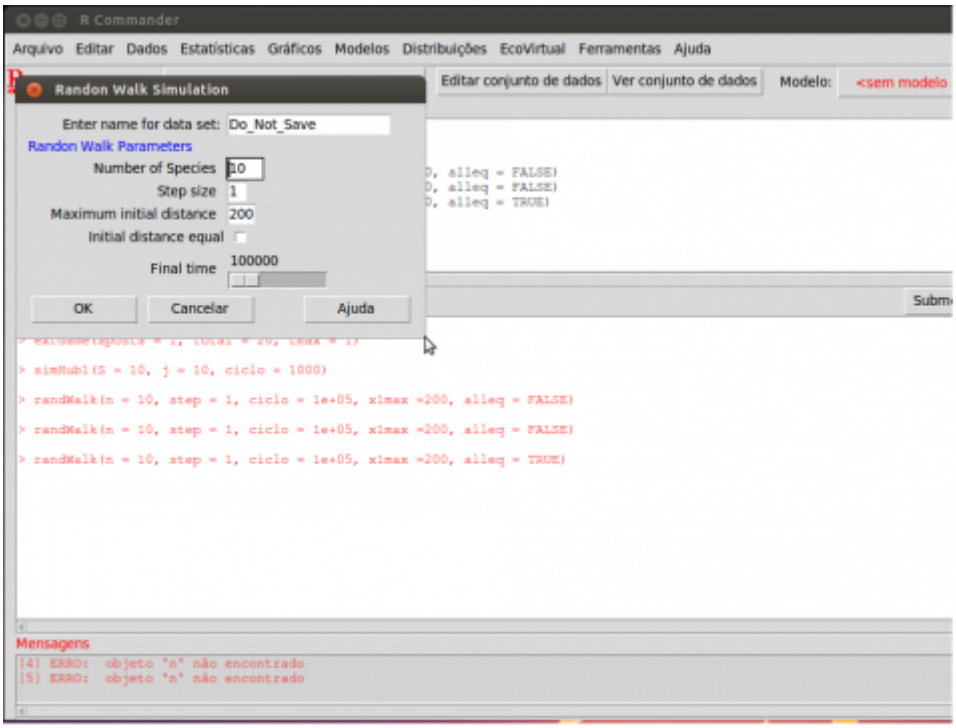
Para prosseguir você deve ter o ambiente **R** com os pacotes **Rcmdr** e **Ecovirtual** instalados e carregados. Se você não tem e não sabe como ter, consulte a página de Instalação.

Caso já tenha o R e pacotes instalados

Carregue o pacote principal ***RcmdrPlugin.EcoVirtual*** pelo menu do R **Pacotes > Carregar Pacotes**, ou pela linha de comando com o código:

```
library("RcmdrPlugin.EcoVirtual")
```

O que podemos prever deste processo? Vamos soltar alguns bêbados neste mundo virtual. Para isto usaremos a função **Random Walk** que se encontra no menu **EcoVirtual > Biogeographical Models > Random Walk**... A janela com as opções da simulação se abrirá:



Parâmetros da simulação:

Opção	Parâmetro	O que faz
`Number of Species`	S	número de bêbados
`Step Size`	step	número de passos para o lado que cada bêbado dá a cada instante de tempo
`Maximum Initial Distance`	x1max	máximo de distância dos bêbados ao abismo no início da simulação
`Initial Distance Equal`	alleq=TRUE	**selecionado TRUE**: todos os bêbados com posição inicial igual a `Maximum Initial Distance` **não selecionado FALSE**: a posição inicial dos bêbados é um valor sorteado no intervalo 1 até `Maximum Initial Distance`, com igual probabilidade.
`Maximum time`	tmax	tempo total da simulação (medido em número de passos para frente)

Exemplo de uso

Vamos soltar dez bêbados, que cambaleiam 10 passos a cada intervalo, por dez mil intervalos de tempo. Use os parâmetros:

- S =10
- step = 10
- x1max = 100
- alleq = TRUE
- tmax = 500

Como em todo processo estocástico, os resultados variam a cada realização. Por isso repita a simulação para se assegurar que entendeu os resultados. Você pode fazer isso repetindo muitas vezes com dez bêbados, ou simplesmente aumentando o número de bêbados, já que que são independentes.

Efeito do passo

O que acontece se deixamos os bêbados um pouco menos cambaleantes? Experimente reduzir para dois os passos laterais:

- S = 10
- step = 2
- x1max = 100
- alleq = TRUE
- tmax = 500

Efeito do tempo

Bêbados que balançam menos estão menos sujeitos a terminar no abismo, ou é apenas uma questão de tempo? Certifique-se disto aumentando o número de intervalos de tempo:

- S = 10
- step = 2
- x1max = 100
- alleq = TRUE
- tmax = 1000

Questão

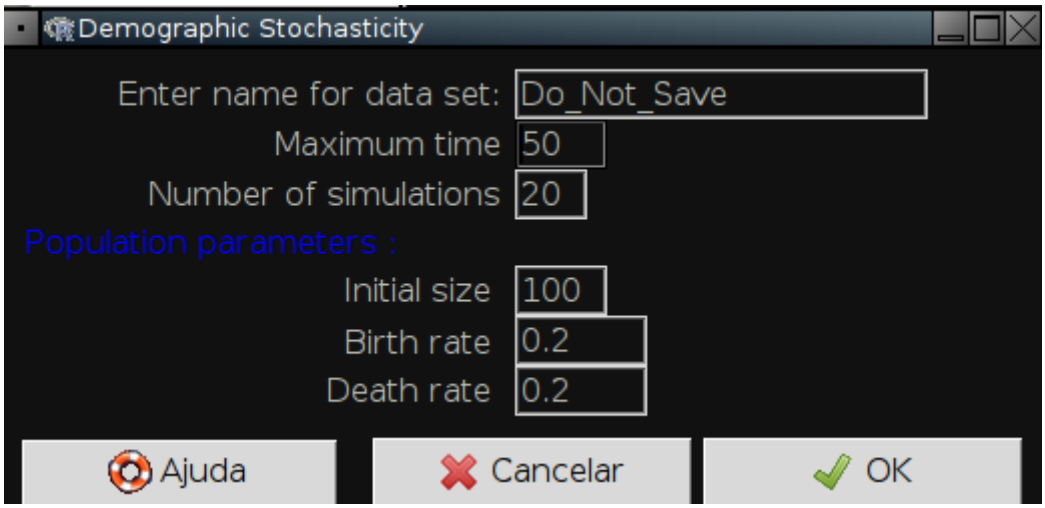
O bêbado tem igual probabilidade de cair para a direita e para esquerda, portanto ele anda em linha reta, na média. Esta caminhada aleatória equiprovável com fronteira de absorção tem um único desfecho, dado tempo suficiente. Qual é?

Populações virtuais

O mesmo modelo de caminhada aleatória pode ser aplicado à dinâmica de populações sob estocasticidade demográfica. Se supomos tempo contínuo, a qualquer momento cada população pode perder um indivíduo por uma morte, ou ganhar um por nascimento. Assim, as probabilidades de nascimentos e mortes por tempo são funções das taxas instantâneas de nascimentos b e mortes d. Se as duas taxas são iguais, por exemplo, a probabilidade de uma morte é igual à de um nascimento.

A taxa instantânea de crescimento é a diferença entre taxas de nascimentos e mortes ($r=b-d$). A unidade de tempo de r dá a escala de tempo da dinâmica, usada no parâmetro `Maximum time`.

Para simular esta dinâmica estocástica de nascimentos e mortes no **EcoVirtual** coloque o cursor na opção *One population* e então na opção *Demographic Stochasticity*. Uma janela como esta deve se abrir:



As opções controlam simulações de populações sob caminhada aleatória em tempo contínuo:

Opção	Parâmetro	Definição
`Enter name for last simulation data set`	objeto no R	nome para salvar os resultados da simulação em um objeto no R
`Maximum time`	tmax	tempo máximo da simulação na escala de tempo das taxas
`Number of simulations`	nsim	número de populações a simular
`Initial size`	N0	tamanho inicial das populações
`birth rate`	b	taxa instantânea de nascimentos (b)
`death rate`	d	taxa instantânea de mortes (d)

Um exemplo

Simule a trajetória de 20 populações em que as taxas de mortes e nascimentos sejam iguais, e que começam todas com 10 indivíduos. Deixe o tempo passar até 50 unidades. Para isso mude as opções de simulação para os valores a seguir. Você deve ver um gráfico de caminhada aleatória muito parecido com o dos bêbados. O número de populações extintas até `Maximun time` está indicado no canto superior esquerdo do gráfico.

- tmax = 50
- nsim = 20
- N0 = 10
- b = 0.2
- d = 0.2

Questões

1. A qual parâmetro da simulação da caminhada do bêbados corresponde cada parâmetros da dinâmica estocástica de nascimentos e mortes?
2. Os efeitos do passo e do tempo observados na simulação dos bêbados valem para as

simulações das populações?
3. Que consequências esses resultados têm para a conservação e manejo de populações?

Para saber mais

- Aqui simulamos uma dinâmica equiprovável de nascimentos e mortes com barreira de absorção. Este é um caso particular de processos estocásticos de nascimentos e mortes. Você encontra mais sobre eles na seção de crescimento denso-independente com estocasticidade demográfica.
- Chemotaxis - How a Small Organism Finds a Food Source: com excelente explicação sobre caminhadas aleatórias e sua aplicação em outra área da biologia. Projeto de alunos do MIT.

136)

como o bêbado dá sempre um passo adiante, apenas o deslocamento lateral é aleatório, e é o que nos interessa aqui. Usamos os passos para frente como medida de tempo

ATENÇÃO: ESTA PÁGINA É UMA VERSÃO ANTIGA DO ROTEIRO E ESTÁ DESATIVADA, PARA ACESSAR O ROTEIRO ATUAL ACESSE ESTE LINK

Caminhada aleatória: o bêbado e o abismo - Roteiro no EcoVirtual

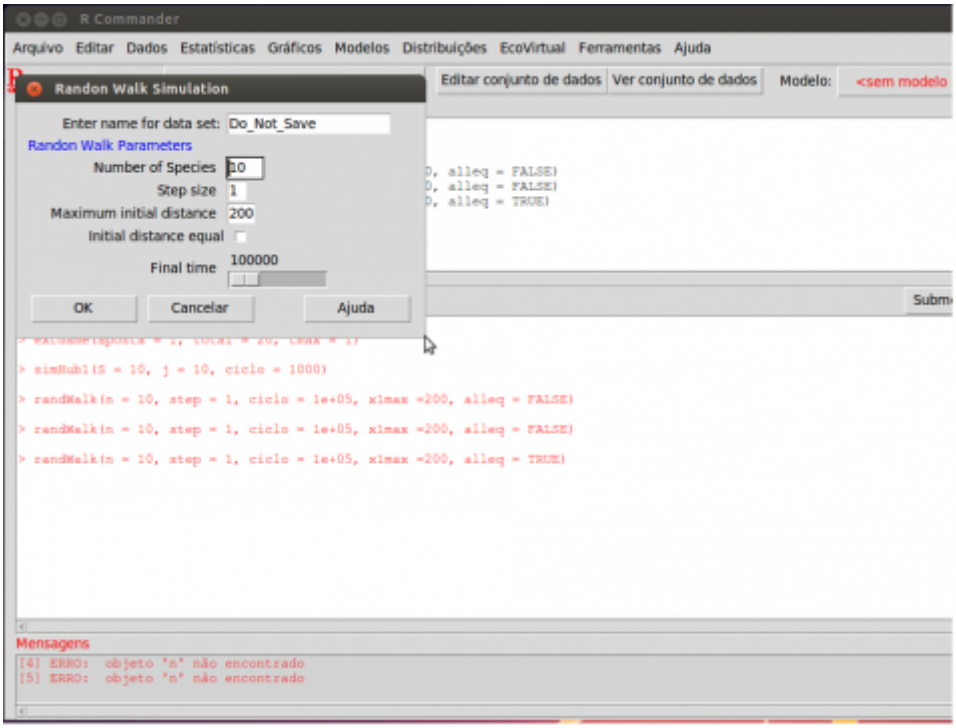
Imagine um bêbado andando sempre para frente em uma enorme planície, mas que tem um abismo em um dos lados. A cada passo para frente, ele cambaleia um certo número de passos para a direção do abismo ou da planície, com igual probabilidade.

Este é um dos processos Markovianos mais simples, chamado caminhada aleatória (random walk) em uma dimensão [137]. Se o bêbado cai no abismo a caminhada acaba (e o bêbado também), uma condição que chamamos de fronteira de absorção (*absorbing boundary*).

Para prosseguir você deve ter o ambiente R com os pacotes Rcmdr e Ecovirtual instalados e carregados. Se você não tem e não sabe como ter, consulte a página de Instalação.

Bebuns virtuais

O que podemos prever deste processo? Vamos soltar alguns bêbados neste mundo virtual. Para isto usaremos a função **Random Walk** que se encontra no menu **EcoVirtual > Biogeographical Models > Random Walk**... A janela com as opções da simulação se abrirá:



Opções da simulação

Opção	O que faz
`Number of Species`	número de bêbados
`Step Size`	número de passos para o lado que cada bêbado dá a cada instante de tempo
`Maximum Initial Distance`	máximo de distância dos bêbados ao abismo no início da simulação
`Initial Distance Equal` (caixa de opção)	**selecionado**: todos os bêbados com posição inicial igual a `Maximum Initial Distance`; **não selecionado**: a posição inicial dos bêbados é um valor sorteado no intervalo 1 até `Maximum Initial Distance`, com igual probabilidade.
`Final Time`	tempo total da simulação (medido em número de passos para frente)

Exemplo de uso

Vamos soltar dez bêbados, que cambaleiam 10 passos a cada intervalo, por dez mil intervalos de tempo. Use os parâmetros:

- `Number of Species` =10
- `Step Size` = 10
- `Maximum Initial Distance` = 200
- `Initial Distance Equal`: marque
- `Final Time` = 10000

Como em todo processo estocástico, os resultados variam a cada realização. Por isso repita a simulação para se assegurar que entendeu os resultados. Você pode fazer isso repetindo muitas vezes com dez bêbados, ou simplesmente aumentando o número de bêbados, já que que são independentes.

Efeito do passo

O que acontece se deixamos os bêbados um pouco menos cambaleantes? Experimente reduzir para dois os passos laterais:

- `Number of Species` = 10
- `Step Size` = 2
- `Maximum Initial Distance` = 200
- `Initial Distance Equal`: marque
- `Final Time` = 10000

Efeito do tempo

Bêbados que balançam menos estão menos sujeitos a terminar no abismo, ou é apenas uma questão de tempo? Certifique-se disto aumentando o número de intervalos de tempo:

- `Number of Species` = 10
- `Step Size` = 2
- `Maximum Initial Distance` = 200
- `Initial Distance Equal`: marque
- `Final Time` = 50000

Pergunta

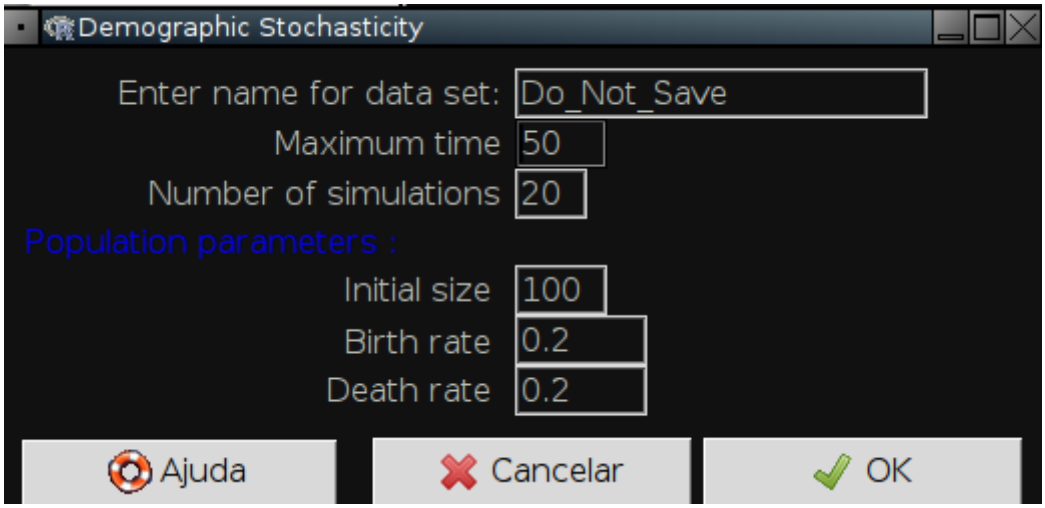
O bêbado tem igual probabilidade de cair para a direita e para esquerda, portanto ele anda em linha reta, na média. Esta caminhada aleatória equiprovável com fronteira de absorção tem um único desfecho, dado tempo suficiente. Qual é?

Populações virtuais

O mesmo modelo de caminhada aleatória pode ser aplicado à dinâmica de populações sob estocasticidade demográfica. Se supomos tempo contínuo, a qualquer momento cada população pode perder um indivíduo por uma morte, ou ganhar um por nascimento. Assim, as probabilidades de nascimentos e mortes por tempo são funções das taxas instantâneas de nascimentos b e mortes d. Se as duas taxas são iguais, por exemplo, a probabilidade de uma morte é igual à de um nascimento.

A taxa instantânea de crescimento é a diferença entre taxas de nascimentos e mortes ($r=b-d$). A unidade de tempo de r dá a escala de tempo da dinâmica, usada no parâmetro `Maximum time`.

Para simular esta dinâmica estocástica de nascimentos e mortes no **EcoVirtual** coloque o cursor na opção *One population* e então na opção *Demographic Stochasticity*. Uma janela como esta deve se abrir:



As opções controlam simulações de populações sob caminhada aleatória em tempo contínuo:

Argumento	**Definição**
`Enter name for last simulation data set`	nome para salvar os resultados da simulação em um objeto no R
`Maximum time`	tempo máximo da simulação na escala de tempo das taxas
`Number of simulations`	número de populações a simular
`Initial size`	tamanho inicial das populações
`birth rate`	taxa instantânea de nascimentos (b)
`death rate`	taxa instantânea de mortes (d)

Um exemplo

Simule a trajetória de 20 populações em que as taxas de mortes e nascimentos sejam iguais, e que começam todas com 10 indivíduos. Deixe o tempo passar até 50 unidades. Para isso mude as opções de simulação para:

- `Maximum time`: 50
- `Number of simulations`: 20
- `Initial size` : 10
- `birth rate` : 0.2
- `death rate`: 0.2

e clique em OK. Você deve ver um gráfico de caminhada aleatória muito parecido com o dos bêbados. O número de populações extintas até `Maximun time` está indicado no canto superior esquerdo do gráfico.

Perguntas

1. A qual parâmetro da simulação da caminhada do bêbados corresponde cada parâmetros da dinâmica estocástica de nascimentos e mortes?
2. Os efeitos do passo e do tempo observados na simulação dos bêbados valem para as simulações das populações?
3. Que consequências esses resultados têm para a conservação e manejo de populações?

Para saber mais

- Aqui simulamos uma dinâmica equiprovável de nascimentos e mortes com barreira de absorção. Este é um caso particular de processos estocásticos de nascimentos e mortes. Você encontra mais sobre eles na seção de crescimento denso-independente com estocasticidade demográfica.
- Chemotaxis - How a Small Organism Finds a Food Source: com excelente explicação sobre caminhadas aleatórias e sua aplicação em outra área da biologia. Projeto de alunos do MIT.

137)

como o bêbado dá sempre um passo adiante, apenas o deslocamento lateral é aleatório, e é o que nos interessa aqui. Usamos os passos para frente como medida de tempo

Coeficiente de determinação

O coeficiente de determinação (R^2) expressa a proporção da variação de uma medida (variável resposta) que é explicada pela variação de outra (variável explanatória). Se supomos que a variação é explicada por uma relação linear, os cálculos são simples e ajudam muito a entender a lógica da partição da variação que está por trás do R^2.

Neste roteiro vamos usar a regressão linear e um conjunto pequeno de dados para entender o coeficiente de determinação.

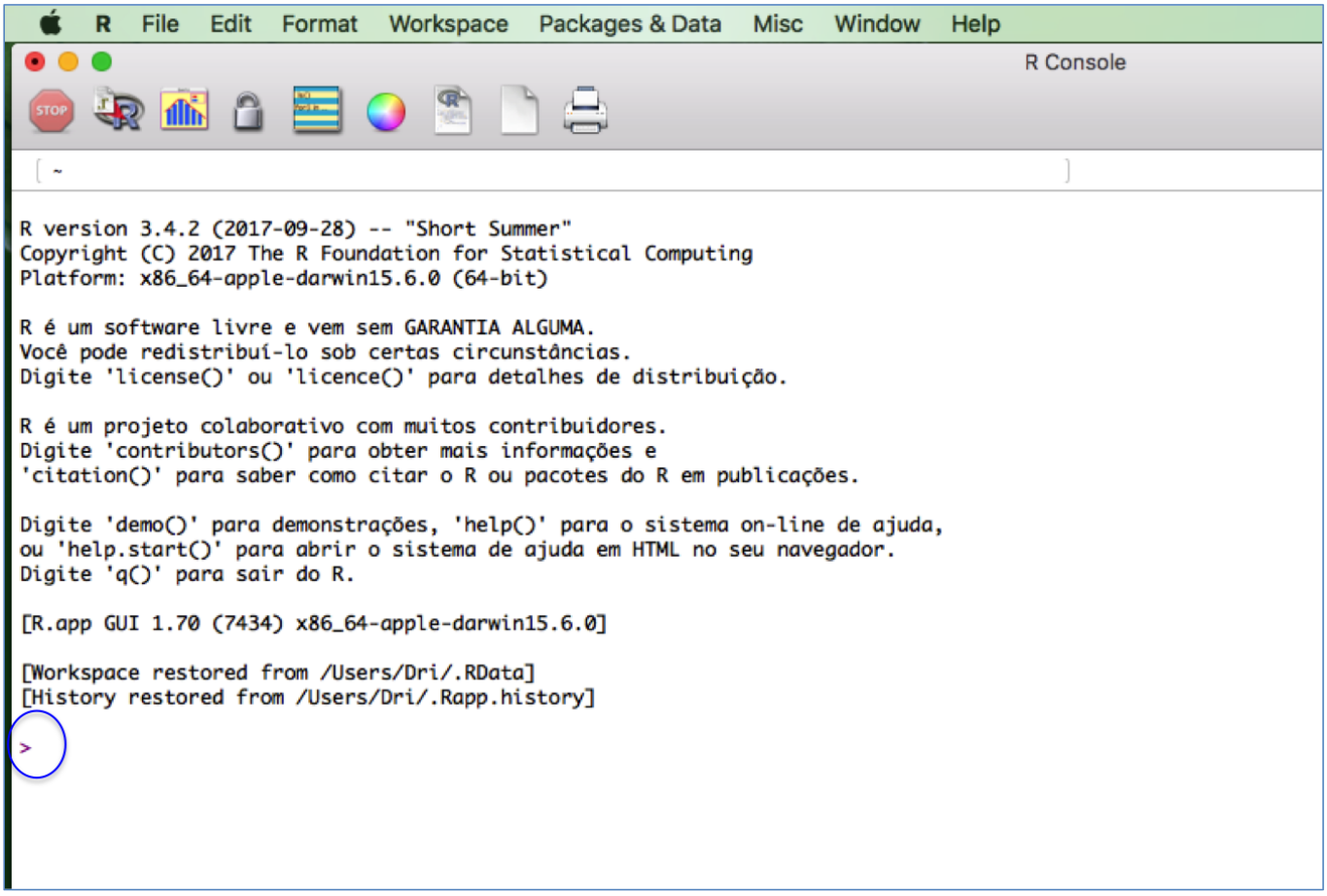
Preparação para o exercício

Para começar, crie uma pasta para você na área de trabalho (desktop) do seu computador. Copie para essa pasta o arquivo com os dados que vamos usar:

dadinho.csv

Em seguida, abra o programa R, clicando no ícone que está na área de trabalho do seu computador.

Se tudo deu certo até aqui, abrirá uma janela do R como essa:



Já com a janela do programa R aberto, o próximo passo será mudar o diretório de trabalho para aquela pasta que você acabou de criar. Com isso será mais fácil importar os dados dos arquivos ".csv" para dentro do ambiente R.

A mudança de diretório deve ser feita da seguinte forma:

- Abra o Menu "Arquivo" (ou "File");
- Selecione "Mudar dir" (ou "Change dir");
- Escolha a sua pasta na janela que abrir.

[Obs. Para Mac, essa opção está no Menu "Misc" e a opção é "Change working dir"]

Para checar se você está na pasta correta, copie e cole o comando abaixo na linha de comando do R. Atenção: O comando deve ser colado na frente do símbolo ">", circundado em azul na imagem anterior. Este símbolo indica o início da linha de comando ou "prompt", onde você deve escrever comandos para o R.

```
getwd()
```

Após colar, aperte a tecla "enter" e veja se o R retorna o nome da sua pasta. Se sim, ótimo. Se não, chame um monitor ou professor.

Importando os dados para o R

Agora vamos importar para o R os dados que você gravou em seu diretório. Para isso copie o comando abaixo, cole na linha de comando do R e pressione "enter":

```
dadinhos <- read.csv("dadinho.csv")
```

Se não houve nenhuma mensagem de erro agora você tem no R uma tabela com 8 linhas e duas colunas, que explicaremos a seguir. Se quiser verificar se a tabela foi importada, digite o nome dela no R

```
dadinhos
```

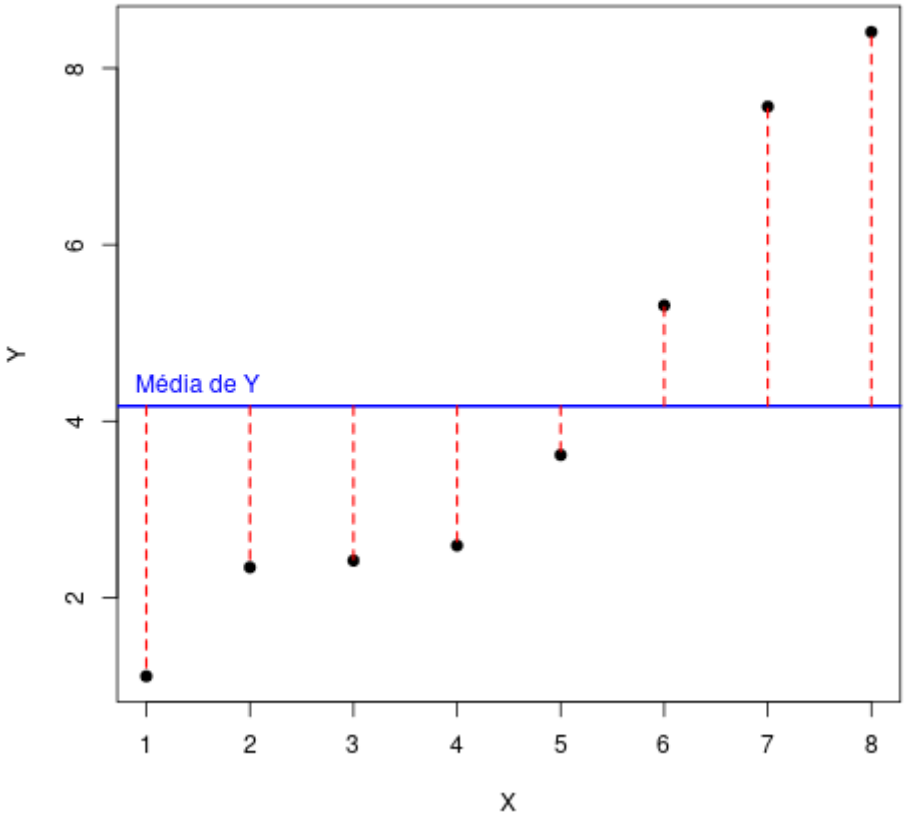
Cálculos passo a passo

A variação total

Nosso ponto de partida é a variação de uma variável, no caso Y. Uma das maneiras mais usadas na estatística para expressar a variação de medidas é sua dispersão em torno da média. Para isso, calculamos a diferença de cada medida à média de todas as medidas. Vamos adicionar uma coluna com essas diferenças à nossa tabela de dados:

```
dadinhos$dif <- dadinhos$Y - mean(dadinhos$Y)
dadinhos
```

Visualmente o que fizemos foi calcular a distância de cada ponto à média de todos os pontos (essas distâncias estão representadas pelos tracejados vermelhos na figura). A média está representada pela linha horizontal azul:



Para resumir essas distâncias em um único número, as elevamos ao quadrado e somamos. Isso é chamado “soma dos desvios quadrados” ou simplesmente “soma dos quadrados”[138]. Ela expressa a variação **total** da variável Y.

Calcule essa soma no R com o comando a seguir, e guarde em um objeto chamado `V.total`

```
V.total <- sum(dadinhos$dif^2)
```

Lembrando que, para ver o valor que vc obteve e armazenou nesse objeto, basta digitar o nome do objeto na linha de comando:

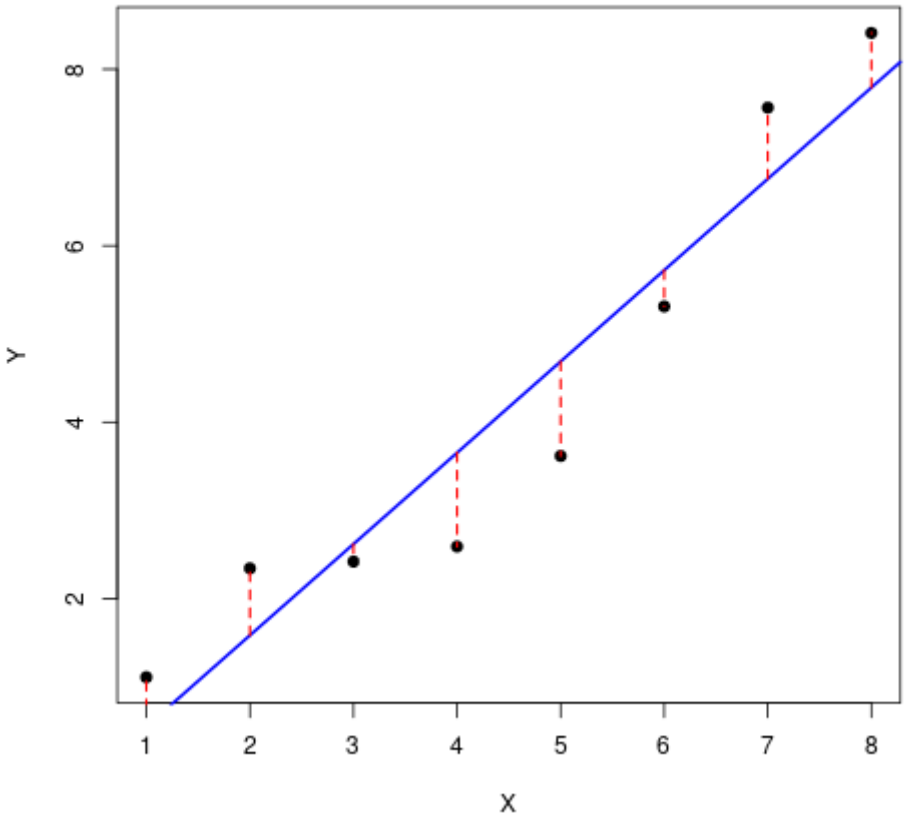
```
V.total
```

A variação que sobra de uma regressão

Uma regressão linear busca explicar a variação observada em uma variável (resposta) pela variação de outra (explanatória). Se a regressão é bem sucedida, esperamos que reste bem menos variação sem explicação, que chamamos de **variação residual** da regressão. Essa variação residual é a “soma dos quadrados dos desvios” de cada ponto à linha de regressão.

- http://ecovirtual.ib.usp.br/

Na figura a seguir está a linha da regressão linear de Y em função de X (representada pela linha azul na figura abaixo), e os desvios de cada observação em relação a esta reta de regressão (tracejados vermelhos). Você percebe pela figura abaixo que os desvios (resíduos) da regressão são bem menores que os desvios em relação à média, da figura anterior?



Como chegamos a estes valores na figura? Vamos calcular passo a passo. Primeiro ajustamos a regressão:

```
dadinhos.lm <- lm(Y ~ X, data=dadinhos)
```

Os intercepto e a inclinação da equação da reta ajustada são:

```
(dadinhos.cf <- coef(dadinhos.lm))
```

E agora adicionamos os valores de Y previstos pela equação da reta para cada valor de X:

```
dadinhos$Y.pred <- predict(dadinhos.lm)
```

e também a diferença entre os valores de Y e os previstos, que são os resíduos da regressão:

```
dadinhos$residuo <- dadinhos$Y - dadinhos$Y.pred
```

Nossa tabela de dados agora tem cinco colunas:

```
> dadinhos
  X        Y        dif    Y.pred    residuo
1 1 1.110051 -3.0608617 0.5497765  0.5602747
2 2 2.343195 -1.8277177 1.5843869  0.7588084
3 3 2.420523 -1.7503898 2.6189973 -0.1984742
4 4 2.590459 -1.5804543 3.6536077 -1.0631491
5 5 3.617083 -0.5538302 4.6882181 -1.0711354
6 6 5.311097  1.1401837 5.7228285 -0.4117319
7 7 7.564503  3.3935902 6.7574390  0.8070641
8 8 8.410393  4.2394798 7.7920494  0.6183433
```

A soma dos quadrados dos resíduos expressa a variação que restou da regressão. É a variação de Y que não é explicada pela variação de X, em uma regressão linear. Para calculá-la somamos os valores da coluna dos resíduos, elevados ao quadrado:

```
V.resid <- sum(dadinhos$residuo^2)
```

E vemos que de fato esta variação residual é bem menor que a total (que está no objeto “V.total”):

```
V.resid
```

A variação explicada pela regressão

Acima calculamos a variação total de Y e a variação que resta em Y depois de considerarmos um efeito linear de X sobre Y. A soma dos quadrados, medida que escolhemos para expressar estes componentes de variação, tem uma propriedade muito útil. Se consideramos o efeito linear de X como a única fonte de explicação para Y, podemos então dizer que:

$$V_{total} = V_{explic} + V_{resid} $$

ou seja, que a soma dos quadrados total (variação total) é o resultado da adição da soma dos quadrados explicados (pela regressão) e da soma dos quadrados dos resíduos da regressão. Em outras palavras, estamos repartindo, ou **particionando aditivamente** a variação total de Y em dois componentes[139)].

Como já calculamos V_{total} e V_{resid} obtemos a variação explicada pela regressão com:

$$V_{explic} = V_{total} - V_{resid} $$

Que podemos calcular no R usando os valores acima, que armazenamos:

```
(V.expl <-  V.total - V.resid)
```

E finalmente o coeficiente de determinação!

Obtemos o coeficiente de determinação dividindo V_{explic} por V_{total}:

```
V.expl/V.total
```

- http://ecovirtual.ib.usp.br/

Esse coeficiente de determinação é o famoso R^2 das regressões lineares!

Neste caso dizemos que 91% da variação de Y é explicada por X. Nada mal. Mas o que você poderia esperar de dados que a gente mesmo criou, né? 😎

138)

por que elevar ao quadrado os desvios à média? Bom, primeiro porque a soma dos desvios brutos é sempre zero,pois temos valores positivo e valores engativos em torno da média... Mas também porque a soma dos desvios ao quadrado tem várias propriedades estatísticas úteis, como a aditividade que vamos ver em seguida.

139)

este raciocínio pode ser generalizado para mais componentes de variação, como veremos no roteiro seguinte

- R

Equação Diferencial Ordinária

Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função. Essa função aparece na equação sob a forma das suas derivadas.

Veja um exemplo de uma equação diferencial simples:

$$ \frac{dy(t)}{dt}= 2 y(t) $$

Essa equação pode ser lida como “qual é a função y(t) cuja derivada é igual a duas vezes ela mesma?”

Resolver uma equação dessas pode ser bastante trabalhoso.[140)] Mas se uma inspiração sobrenatural te disser que “a resposta é $\exp(2x)$”, nós podemos verificar que essa resposta está correta.

Se $y(t)=\exp(2x)$, a derivada de $y(t)$ é $2\exp(2x)$ (lembre da regra da cadeia), que é, de fato, duas vezes a própria $y(t)$.

Normalmente, escrevemos a EDO com a derivada de $y(t)$ do lado esquerdo. Um caso simples de EDO é aquele em que o lado direito não envolve a função y, e portanto depende só de t:

$$ \frac{dy(t)}{dt}= f(t) $$

Podemos solucionar essa equação da seguinte forma:

- $ dy = f(t) dt $
- $ \int{dy} = \int{f(t) dt} $

O que nos dá uma solução geral:

$$ y = \int{f(t) dt} $$

Um caso mais complicado é aquele em que a derivada da função depende tanto de y como de t. Escrevemos:

$$ \frac{dy(t)}{dt}= f(y, t) $$

Vamos retomar esse caso na sessão de soluções numéricas.

Uma EDO simples no Maxima

Vamos usar o Maxima para resolver uma função simples para nós. Lembre-se da EDO da sessão anterior, mas agora vamos trocar a constante 2 por um parâmetro r:

$$ \frac{dy(t)}{dt} = r y(t)$$

Nossa equação verbalmente colocado é: a taxa de variação instantânea da nossa variável de

interesse é proporcional a ela própria. Ou seja: quanto maior o valor de y, maior a taxa de crescimento!

Para resolver isso no Maxima, use

```
'diff(y(t),t)=r*y(t);
ode2(%, y(t), t);
```

Essa equação parece familiar? Vamos resgatá-la mais a frente no curso: é a equação do modelo de crescimento populacional exponencial, a estrutura básica de muitos outro modelos. Faça o gráfico dessa função para $ r=0.2 $ e estado inicial igual a 10!

```
plot2d(10*exp(0.2*t),[t,0,20]);
```

Outra função simples

Vamos pensar em outro caso, onde a taxa de variação instantânea é positiva e tende a zero quando o valor da nossa variável aproxima a um. Em outras aumenta muito quando o valor e pequeno e muito pouco quando o valor aproxima-se a um.

$$ f(x)=f(x)* (1-f(x)) $$

```
'diff(f(t),t)=f(t)*(1-f(t));
ode2(%,f(t),t);
```

Talvez não reconheça essa função, faça exponenciação de ambos os lados que ela parecerá mais simpática. Ela é a solução do exemplo anterior multiplicada por uma expressão que funciona como um freio que aperta mais forte conforme chega perto de um. Elá é a base dos modelos logísticos populacionais.

Soluções Numéricas

Essas primeiras equações diferencial foram fáceis de resolver no Maxima . Mas não se acostume, nem sempre é assim. Muitas equações não tem soluções algébricas[141)] e precisam ser resolvidas com métodos chamados de “força bruta”. São geralmente computacionalmente intensos, mas com um computador pessoal podemos fazer maravilhas… O processo básico é bem simples, muito parecido com o que fizemos para resolver as derivadas, mas existem muitas outras técnicas mais robustas.

Método de Euler

Ele é bastante simples, e consiste em fazer uma aproximação da curva usando as tangentes em diferentes pontos. Vamos pegar a função:

- $\frac{dN}{dt} = rN $ com r=2 e N(0) =20.

Como vimos:

- $\frac{dN}{dt} \approx \frac{N_{t + \Delta t} - N_t}{\Delta t}$

Podemos usar um intervalo de tempo arbitrário, por exemplo 0.1, o que nós dá :

- $\frac{N_{t + 0.1} - N_t}{0.1}\approx 2N$

Ou seja, sendo que $N(0)=20$, no tempo 0.1, temos que:

- $N_{t + 0.1} - N_t= 2N * 0.1$
- $N_{t + 0.1} = 2N_t*0.1 + N_t$
- $N_{t + 0.1} = 40 * 0.1 + 20 $
- $N(0.1) = 24 $

No tempo 0.2, temos que:

- $N_{0.1 + 0.1} - N_0.1 = 2N_0.1 * 0.1$
- $N_{0.1 + 0.1} = 2 * 24 *0.1 + 24$
- $N_{0.1 + 0.1} = 48 * 0.1 + 24 $
- $N(0.2) = 28.4 $

E assim por diante .... $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ Note que quanto menor o intervalo de tempo que usamos melhor é a precisão da nossa aproximação, lembrando que $\Delta t \rightarrow 0 $ Podemos repetir isso para os próximos intervalos de tempo no R.

```
f <- function (N, t)
{
        return (2*N)
}
# No tempo inicial, N vale 20:
N0 <- 20
# O passo de tempo eh dt. Vamos rodar ateh tmax
dt <- 0.1
tmax <- 2

euler <- function (f, N0, dt, tmax)
{
        # res vai retornar o vetor com todos os Ns
        res <- NULL
        N <- N0
        for (tempo in seq(0, tmax, dt))
        {
                N <- N + f(N,tempo)*dt
                res <- rbind(res, N)
        }
        return (res)
}

# Examine a solucao numerica:
numerica <- euler(f, N0, dt, tmax)
```

```
x<- seq(0, tmax, dt)
# A solucao correta da EDO:
plot(x, 20*exp(2*x), typ='l', col='green')
# Vamos comparar com a solucao numerica
points(x, numerica, col='red', pch=4, ce=0.2)
```

A aproximação foi boa? Tente repetir o mesmo código com dt = 0.01 e 0.001 e compare.

Integração Numérica no R

Não precisamos fazer todo o procedimento anterior para fazer a integração numérica no R, existem soluções implementadas previamente que são muito mais eficientes e robusta que a nossa. Vamos integrar numericamente algumas equações usando o pacote *deSolve* e a função *ode*. Antes de tudo precisa instalar e carregar o pacote. Para instalar você pode usar o menu do RGui ou pela linha de comando, digite:

```
install.packages("deSolve")
```

Carregando o pacote e olhando o help da função *ode*:

```
library(deSolve)
?ode
```

Muito bem! Agora que já temos o pacote carregado, vamos integrar numericamente algumas funções, ou seja, calcular o valor para cada tempo infinitesimal dentro de um amplitude de valores.

Uma função simples

Vamos primeiro usar uma função simples:

$$ \frac{dy}{dt} = y-\frac{y^2}{K} $$

- 1. Primeiro criamos a função, com os seguintes parâmetros na função R:
    - o tempo, que depois definiremos com uma sequência numérica
    - a situação inicial da variável independente
    - os parâmetros da equação diferencial

```
  fy1 <- function(time,y,parms)
  {
   n=y[1]
   K=parms[1]
   dy.dt=n-(n^2/K)
   return(list(c(dy.dt)))
  }
```

- 2. Agora precisamos criar os parâmetros:

```
  prmt = 10
  y0 = 1
  st=seq(0.1,20,by=0.1)
```

- 3. Vamos resolver a nossa equação diferencial e graficá-la:

```
  res.fy1= ode(y=y0,times=st, fy1,parms=prmt)
  plot(res.fy1[,1], res.fy1[,2], type="l", col="red",lwd=2, xlab="tempo",
ylab="y")
```

Será que a função *ode* fez mágica? Ela apenas usa um método parecido com o de Euler, que vimos acima, para achar a solução numérica de uma ode.

Uma outra função simples

Agora nossa equação é:

$$\frac{dy}{dt}= y(ay^2 + by + r) $$

Veja o código abaixo:

```
fy2 <- function(time,y,parms)
  {
   n=y[1]
   a=parms[1]
   b=parms[2]
   r=parms[3]
   dy.dt=n*(a*n^2 + b*n + r)
   return(list(c(dy.dt)))
  }
prmt = c(a=-1,b=4, r=-1)
y0 = 1
st=seq(0.1,20,by=0.1)
res.fy2= ode(y=y0,times=st, fy2,parms=prmt)
plot(res.fy2[,1], res.fy2[,2], type="l", col="red",lwd=2, xlab="tempo",
ylab="y")
```

Agora é com vc.

- modifique a condição inicial e veja o que acontece: 0,5; 0,3; 0,01

Agora é realmente com vc.

Faça a integração numérica para as seguintes funções:

- 1. $ \frac{dy}{dt} = y-y^2*f(t)$
    - sendo: $f(t)= 0.01 + 0.01 sin(2\pi Mt)$;

    - M=15
- 2. $\frac{dn}{dt} = r(t)*n $
    - sendo: $r(t)= 0.1 - 100 sin(2 \pi t)$

maxima, equação diferencial, R

140)

existem pelo menos umas 3 matérias no IME relacionadas a isso!

141)

outras tem mais de uma solução

-
- Exercicios

Integral

Exercício 1

Determine o resultado das seguintes integrações:

a) $ \int \sin(x) dx$

b) $ \int x^2 +1 dx$

c) $ \int _0^1 \cos (x) dx$

d) $ \int _{-1}^5 x^3 +2x dx$

e) $ \int _1 ^ \infty \frac{1}{x^2}dx$

f) $ \int _0 ^ 1 \sin (x^{27}) dy $ (cuidado, pegadinha!)

Quais desses são integrais definidas e quais são integrais indefinidas?

Exercício 2

(Use o Maxima)

Em algumas espécies o principal fator que leva a dispersão das sementes é o vento. É possível modelar a distribuição das sementes em função da distancia da fonte mecanisticamente, e uma das expressões, para ventos unidirecionais, que podem ser derivadas é

* $ Q(x) = \frac{NW_s}{\sqrt{2\pi}\bar u \sigma_z} \exp \left[- \frac{ (H-W_sx/\bar u)^2 } {2 \sigma_z^2} \right] $

Os parâmetros dessa equação são:

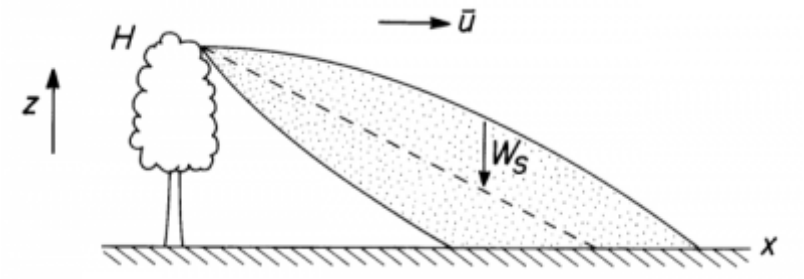
* N: a taxa de produção de sementes na fonte

* σ_z: o componente vertical da variância no movimento aleatório da semente

* W_s: a velocidade de fixação da semente

* $\bar u$: velocidade media do vento

* H: altura da fonte



(Okubo & Levin, 1989)

1) Vamos encontrar qual é o total de sementes que uma árvore dispersa em um raio de 1m. Para isso, integre a função $Q(x)$ entre -1 e 1. Use $N = 100$, $\sigma_z = W_s = \bar u = H = 1$.

2) Qual é o total de sementes dispersadas em todo o eixo x? Esse resultado é esperado?

3) Qual é a expressão que, para uma certa distancia d, dá o total de sementes dispersadas entre 0 e d?

* (Nota: ERF? Leia sobre essa função esquisita aqui)

Exercicio 3

No exercicio 2, consideramos a dispersão de sementes no espaço em um tempo fixo (como uma fotografia). Vamos agora observar a produção de sementes ao longo do tempo: agora N sera uma função periódica do tempo para representar as estações do ano:

* $ N(t) = N_0(\sin(t) + 1) $

Vamos usar $N_0 = 100$, e assim, nosso exercício anterior corresponde ao caso em que $\sin(t)=0$ (por exemplo, com $t=0$).

Agora, nossa função $Q(x, t)$ depende não só de x, mas também de t:

$ Q(x, t) = \frac{N(t)W_s}{\sqrt{2\pi}\bar u \sigma_z} \exp \left[- \frac{ (H-W_sx/\bar u)^2 } {2 \sigma_z^2} \right] $

1) Encontre a densidade total de sementes dispersadas na distância entre -1 e 1 no tempo 0, para se certificar de que isso bate com o resultado anterior: $\int _{-1}^1 Q(x, 0) dx$.

2) Qual é a densidade de sementes que caem sobre o ponto $x=1$ durante um ciclo anual completo, ou seja, com t variando de 0 a 2π? Resolva a integral *no tempo*: $ \int _0 ^ {2 \pi} Q(1, t) dt$.

3) Encontre uma expressão para a densidade de sementes em momento t qualquer, no raio de x entre -1 e 1. Veja que essa resposta vai ser uma *função de t*, vamos chama-la de $h(t)$, onde $h(t) = \int _{-1}^1 Q(x,t) dx$.

4) Use essa função que você achou na questão 2.3 para encontrar a densidade total de sementes dispersadas com x entre -1 e 1 e durante todo um ciclo anual.

Nesse último exercício, você calculou a integral $ \int _0 ^ {2 \pi} h(t) dt$. Se você escrever a definição de $h(t)$ nessa expressão, vamos chegar a:

$ \int _0 ^ {2 \pi} \int _{-1} ^ 1 Q(x, t), dx dt $

Parabéns! Você acabou de fazer uma integral dupla! 😎

Desafio

(Não precisa entregar essa parte, mas leia com carinho!)

1) Na questao 2 acima, a nossa produção de sementes está posicionada na origem. Se uma árvore estiver em uma posição genérica x, escreva qual é a expressão da taxa de queda de sementes em um ponto y.

2) Mudemos agora nosso ponto de vista. Numa expedição de reconhecimento matemático pelo eixo x, intrépidos exploradores encontraram uma vasta e densa floresta, que se estende do ponto A ate o longínquo ponto B, composta por N fontes de sementes homogeneamente distribuídas. É possível construir uma função que nos dê a taxa de queda de sementes em cada ponto do eixo? (Como temos um modelo de vento unidirecional, suponha que venta de A para B)

3) É possível quantificar a taxa de emigração dessa floresta (a taxa de sementes que se fixam para além de B)?

4) Como ficaria a expressão construída em 2 se a floresta, ao invés de ser homogênea, tivesse suas fontes distribuídas seguindo uma normal?

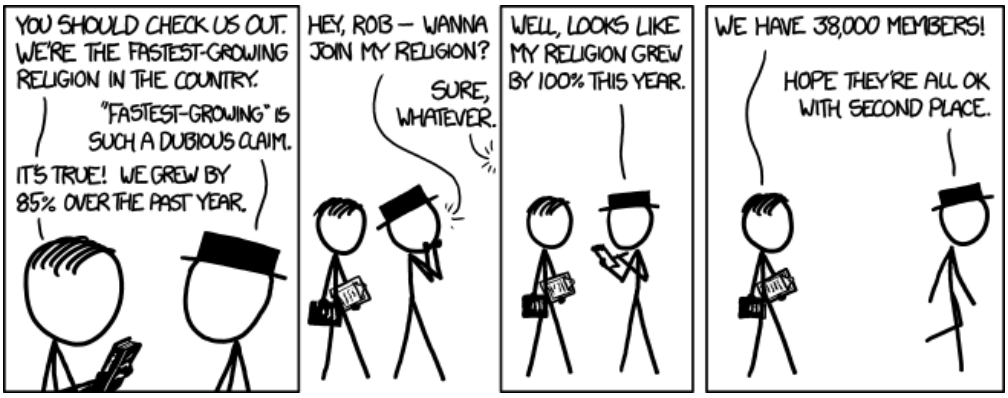
5) E se ventasse metade do tempo para cada lado, como ficaria a expressão em 2?

6) Usando a expressão obtida em 5, e o teorema fundamental do cálculo, descubra o ponto em que se fixa o maior numero de sementes.

Reposta

Veja a solução do exercício solexintegral.wxm

Taxas de crescimento e função exponencial - Roteiro em Planilha



Este roteiro é uma demonstração informal dos principais passos de dedução do modelo de crescimento exponencial, a partir do modelo de crescimento a intervalos discretos. Você vai descobrir que a função exponencial é o limite de um crescimento discreto a uma taxa constante, quando fazemos os intervalos de tempo muito pequenos. Para isso, passaremos pelo conceito de derivadas e pela noção de limite de uma função.

Ao final, chegaremos a um dos primeiros princípios em ecologia: na ausência de forças externas, uma população biológica vai crescer ou descrescer exponencialmente. Infelizmente, juros também se comportam assim.

Do tempo discreto para o contínuo

Para muitos parece mais confortável pensar em mudanças no tamanho da população a intervalos discretos: contamos o número de indivíduos em um instante e no instante seguinte. O modelo geométrico descreve esta dinâmica, se a população cresce sem limites. O número de indivíduos no próximo intervalo de tempo, N_{t+1}, é igual ao número de indivíduos no tempo anterior N_t, multiplicado pela taxa de crescimento da população entre os dois intervalos, que chamamos λ:

$$N_{t+1} \ = \ \lambda N_t$$

Mas quanto esperamos entre uma contagem e outra? Se os nascimentos e mortes podem ocorrer a qualquer momento, devemos fazer censos a intervalos bem curtos. Mostraremos que o tempo contínuo é apenas uma outra maneira de pensar no tempo discreto: tornamos os intervalos tão pequenos quanto quisermos. Esse será nosso ponto de partida para deduzir o modelo de crescimento exponencial, com auxílio de algumas ferramentas computacionais.

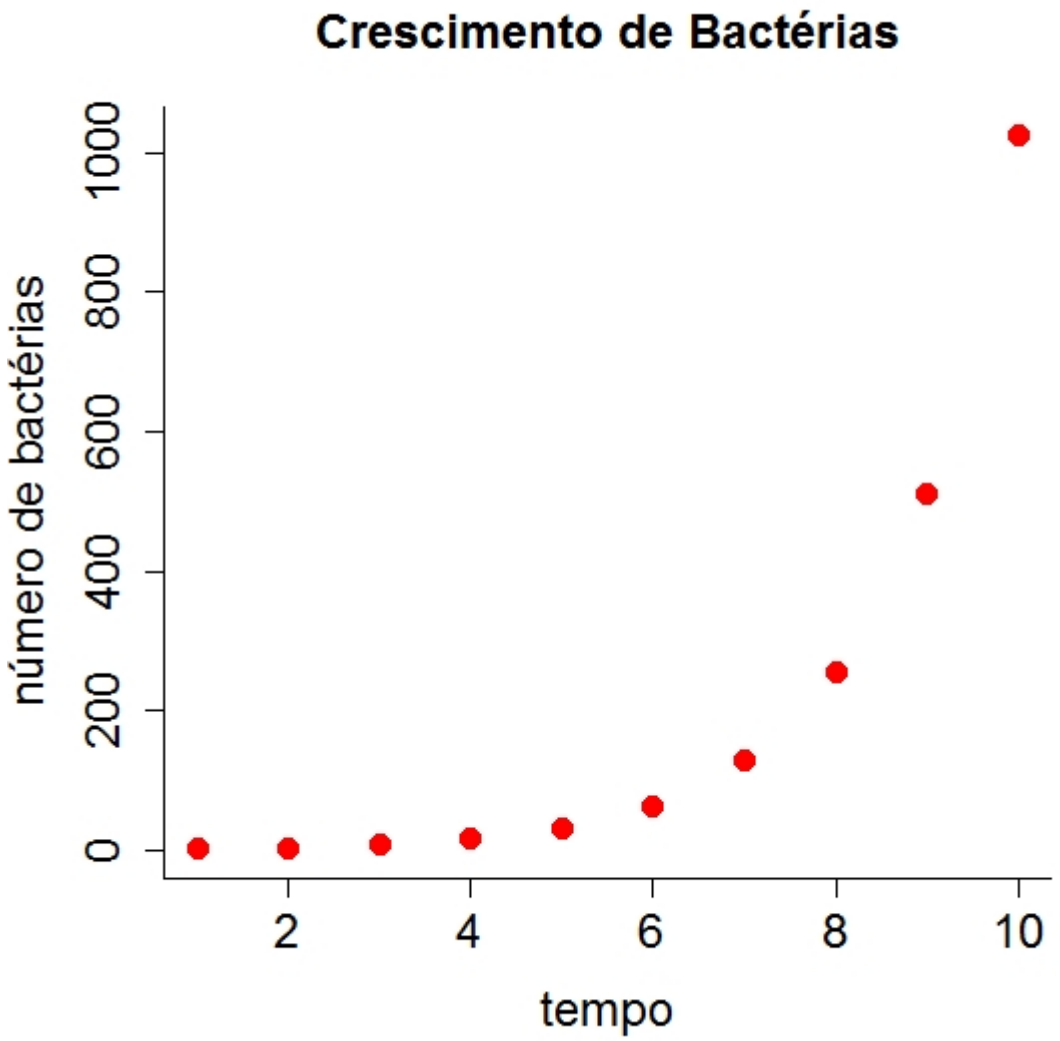
Tempo discreto

Vamos acompanhar o crescimento inicial e uma população e bactérias no vídeo [142)]:

O que pode ser descrito pelo número de bactérias observadas a cada intervalo de tempo:

Tempo	No. de Bactérias
0	2
1	4
2	8
3	16
4	32
5	64
...	...
14	16384
...	...
30	1073741824
...	...
60	1152921504606846976

É difícil entender o que está acontecendo, apenas olhando essa tabela. Um gráfico pode ajudar.



Exercício

Vamos Fazer o Gráfico

1. Abra o Excel e siga os passos abaixo:
    - nomeie a primeira coluna **A** como ***tempo***
    - faça uma sequencia de 1 até 10 para representar os intervalos de tempo [143)]
    - nomeie a coluna **B** como ***nbact*** ;
    - digite a formula *=2^A2* na célula **B2** e pressione *ENTER*;
    - copie a formula puxando a célula **B2** pelo canto inferior direito [144)]

	A	B	C	D	E
1	N0	2		exp(rd)	2.71828183
2	r	1			
3					
4	n intervalos	Nt	Nt/N0		
5	1	=$B$1*(1+$B$2/A5)^A5	'=B5/$B$1		
6	2	4.500	2.250		
7	3	4.741	2.370		
8	4	4.883	2.441		
9	5	4.977	2.488		
10	6	5.043	2.522		
11	7	5.093	2.546		

Pronto, vc. já simulou os dados do crescimento. Agora é só fazer o gráfico. Veja se consegue fazer parecido com o que apresentamos acima. Em seguida faça um outro gráfico com o tempo chegando a 20.

Note que o que temos é uma série temporal, que são registros do tamanho da população em certos instantes de tempo. Uma outra forma de descrever esse processo é saber:

- **Quão rápido cresce o número de bactérias** ou,
- **Qual a velocidade de crescimento das bactérias**

A noção de derivada

Para expressar o quanto a população variou em um dado período de tempo calculamos a taxa de variação da população no tempo t e após um intervalo Δt:

$$\text{Taxa de Variação}= \frac{{N(t + \Delta t) - N(t)}}{\Delta t} $$

Ou seja: tome os valores do número de bactérias em dois tempos próximos e divida pelo tempo decorrido entre uma observação e outra!

Entretanto o $ \Delta t $ é arbitrário. Se a população tem períodos reprodutivos bem definidos (p.ex. anuais), o intervalo de observação discreto é natural. Mas e se nascimentos e mortes podem ocorrer a qualquer momento? Quanto menores nossos intervalos de observação, mais precisa será a nossa descrição da dinâmica. Nestes casos parece uma boa ideia fazer o intervalo Δt ser o menor possivel, bem próximo de zero.

Mas se aproximamos Δt de zero, ${N(t + \Delta t) - N(t)}$ tenderia também a zero, já que os tamanhos populacionais nos dois momentos seriam muito parecidos. Portanto o resultado dessa taxa deve ser $0/0$ [145)].

Vamos verificar se essa lógica está correta. Para começar, vamos supor uma população cujo tamanho é igual ao quadrado do tempo decorrido ($N(t)= t^2 $) [146)]. Vamos então aplicar esta função para intervalos cada vez menores de tempo a partir de t=1, e ver o que acontece para a taxa de variação do tamanho populacional:

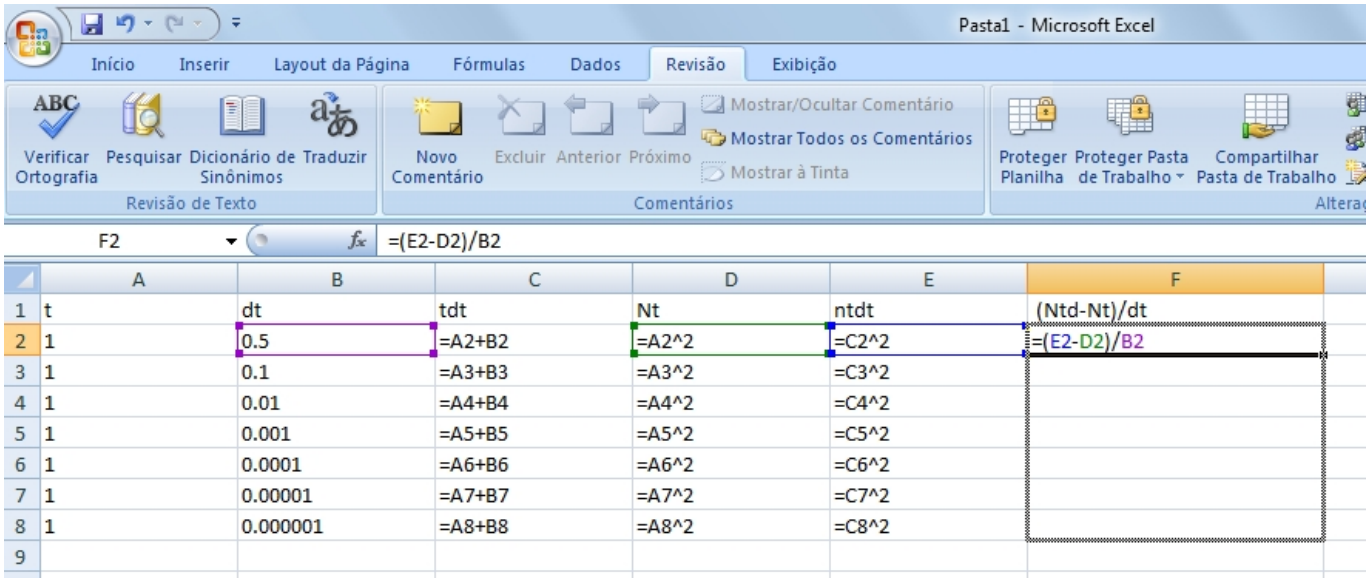
Diminuindo Δt

tempo = 1

1. Abra o Excel e siga os passos abaixo:
    - nomeie a primeira coluna (**A**) com a letra t e insira o valor 1 (um)

nas sete linhas seguintes desta coluna;
- nomeie a segunda coluna **B** como `dt` (delta tempo);
- faça uma sequencia de números em delta tempo, diminuindo: 0.5,0.1,0.01,0.001,0.0001,0.00001,0.000001
- nomeie a terceira coluna **C** como `tdt` (delta tempo + tempo);
- inclua a fórmula =A2+B2 na célula C2;
- nomeie a quarta coluna **D** como `Nt` (tamanho da população no tempo t);
- inclua na posição **D2** a fórmula =A2^2, o tamanho da população no tempo t;
- nomeie a quinta coluna **E** como `Ntdt` (tamanho da população no tempo t + dt);
- inclua na posição **E2** a formula =C2^2, o tamanho da população no tempo t + dt;
- nomeie a última coluna **F** como (Ntdt-Nt)/dt e inclua formula =(E2-D2)/B2 na celula **F2**;
- marque as células **C2** até **F2** e arraste as formulas para baixo até a linha 8, para que sejam copiadas [147)]

2. Refaça o mesmo procedimento para os tempos 2 a 5, copiando e colando ao lado a lado as colunas anteriores e modificando apenas os valores da coluna tempo.
3. Observe o que acontece com o valor da taxa de crescimento à medida que o intervalo Δt é reduzido.



Ao contrário do que esperávamos, o valor da taxa converge para um número bem definido com a redução de Δt !

Repita o procedimento para outros valores tempo. Você deve encontrar este resultado:

t	${N(t + \Delta t) - N(t)} / {\Delta t} $
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Ou seja, a taxa instantânea de crescimento para t^2 tende a $2t$ à medida que Δt é reduzido. Podemos reduzir Δt o quanto quisermos, e este resultado fica cada vez mais exato. Encontramos a **derivada** da função $N(t)=t^2$!

Definição de uma derivada

A derivada de uma função $X(t)$ é sua taxa de variação instantânea, obtida pelo limite da taxa de variação:

$$\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

quando $\Delta t \to 0$ [148]. Uma das maneiras de representar uma derivada é na notação de uma taxa em relação ao tempo:

$$\frac{dX}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

Crescimento Exponencial

Uma maneira simples de pensar em derivadas é que elas são velocidades instantâneas [149]. Vamos então descobrir a expressão para a velocidade instantânea de crescimento da nossa população de bactérias:

Tempo	No. de Bactérias	Velocidade
0	2	
1	4	2
2	8	4
3	16	8
4	32	16
5	64	32

As bactérias duplicam-se a cada instante de tempo. Por isso, se a população dobrar, a sua velocidade de crescimento também dobra. Se ela quadruplicar, a velocidade quadruplicará, e assim por diante. Ou seja, *a velocidade de crescimento é proporcional ao tamanho da população*.

Já que estamos interessados em velocidades instantâneas, vamos representar esta proporcionalidade com uma derivada: \begin{equation} \frac{dN}{dt}= rN \label{dndt} \end{equation}

Em que a constante de proporcionalidade r é chamada taxa intrínseca de crescimento populacional, ou seja, o quanto cada indivíduo contribui instantaneamente para a variação no tamanho da população. Este é o modelo mais simples de crescimento populacional. O modelo é uma *equação diferencial*, pois estabelece uma igualdade entre a derivada de uma função (lado esquerdo) e alguma expressão algébrica, no lado direito da equação. Traduzindo em palavras, este modelo seria *"uma função do crescimento populacional* N *tem derivada proporcional a ela mesma*". A função que tem esta propriedade, ou seja, que satisfaz esta equação é:

\begin{equation} \label{ert} N_t=N_0e^{rt} \end{equation}

Que é a função de crescimento populacional exponencial. Vamos ver como chegamos a isso!

Soluções de equações diferenciais

Uma equação diferencial de primeira ordem estabelece uma relação entre a derivada de uma função e alguma outra função matemática. Resolver uma equação destas é encontrar a função cuja derivada satisfaça a relação proposta.

O problema é que não há um algoritmo simples para fazer isso. Há muitas regras e tabelas que relacionam derivadas mais simples às suas respectivas funções (as antiderivadas). Além disso, em geral é preciso muita manipulação matemática para expressar a equação diferencial em termos destas formas catalogadas. Mesmo assim, nem sempre se chega a uma solução que pode ser expressa como uma função conhecida, o que chamamos de solução analítica. Felizmente, a equação diferencial ($\ref{dndt}$) é simples o bastante para ter solução analítica conhecida.

Melhor ainda, hoje há programas de computador que manipulam regras de matemática simbólica, incluindo as antiderivadas que precisamos para resolver equações diferenciais. São os *Sistemas de Álgebra Computacional*[150]. O Maxima é um desses programas, e pode nos ajudar a solucionar a equação diferencial. Vamos usá-lo *online*.

As janelas de código abaixo executam o Maxima *online*: o código é enviado ao servidor Sage Cell, que tem o Maxima pronto para executar comandos. O servidor então retorna o resultado para nossa página.

Se preferir, você pode instalar o Maxima em seu computador e executar os mesmos comandos. É uma ferramenta muito útil para resolver problemas matemáticos. Veja nossa Introdução ao Maxima.

Solução no Maxima

O comando abaixo define um objeto chamado `eq1` no Maxima, para armazenar a expressão simbólica da nossa equação diferencial $dN/dt=rN$. Clique no botão `Evaluate` para criar o objeto:

Agora use o comando `ode2` do Maxima para resolver a equação diferencial. O primeiro argumento é a equação diferencial, o segundo a variável dependente ($N(t)$) e o terceiro a variável independente (t):

O resultado deve ser:

$$ N(t)=c e^{rt} $$

Onde c é uma constante de integração desconhecida. A expressão acima satisfaz a equação diferencial, para qualquer valor de c, e isso é tudo que as regras de antiderivação podem nos dar.

Condições iniciais

Para ir adiante temos que dar algo mais: as condições iniciais do sistema. Vamos então definir o número inicial de indivíduos na população, N_0. Este é o tamanho da população no tempo zero, que substituímos na equação de crescimento exponencial:

$$N_0 = c*e^{0} = c*1 = c$$

Logo $c = N_0$, e finalmente temos nossa equação de crescimento exponencial:

$$ N_t= N_0 e^{rt} $$

A função exponencial

Satisfeito(a)? Espero que não, pois simplesmente apelamos para uma tabela de antiderivadas em um programa para encontrar a solução de nossa equação diferencial. Aprendemos a lógica geral da solução de uma equação diferencial, mas não porque a equação que propusemos tem esta solução específica.

Uma maneira de entender é retornar ao raciocínio de reduzir intervalos de tempo. Vamos começar com uma população que tem uma taxa de crescimento anual de $\lambda = 1,5$:

- $N_1=N_0 \lambda$, ou:
- $N_1=N_0 (1+ rd)$, onde *rd* = coeficiente discreto de crescimento
- $N_1= N_0(1 + 0,5)$

Agora, vamos supor que essa mesma população tenha dois ciclos reprodutivos anuais, portanto temos que calcular o aumento na população no primeiro semestre do ano, e multiplicar este valor novamente pela taxa de crescimento, para obter o tamanho da população no final do ano. Vamos supor que a taxa semestral de crescimento seja metade da anual:

$$N_1 \ = \ N_0 \left(1+\frac{0,5}{2} \right) \left(1+\frac{0,5}{2} \right)$$

Isso equivale a

$$N_1 \ = \ N_0 \left(1+\frac{0,5}{2} \right)^2 \ = \ N_0(1+0,25)^2 \ \to \frac{N_1}{N_0} \ = \ (1+0,25)^2 \ \simeq \ 1,56$$

Ops! Uma taxa de crescimento de 1,25 ao semestre resulta em um crescimento maior que a taxa anual de 1,5. Não é difícil entender: no segundo semestre a população aumentou em 25% de uma população que já cresceu 25% no primeiro semestre. Mantendo o raciocínio, trimestralmente a taxa seria de $(1 + 0.5/4)$ e deveria ser aplicada quatro vezes. Isso resultaria em um crescimento anual de cerca de 1,60. Onde isso vai parar?

Jacob Bernoulli foi o primeiro a solucionar este problema, preocupado com o comportamento de juros compostos, nos idos do século XVII. Ele partiu da expressão usada para calcular estes juros, que nada mais é que a generalização de nossa expressão de crescimento em um ano dividido em n intervalos, :

$$ \frac{N_1}{N_0}= \left(1+\frac{r_d}{n} \right) ^n $$

Em seguida ele notou que para calcular uma dívida (o tamanho da população em nosso caso) que

aumenta a todo instante, teríamos que deixar o número de intervalos de tempo (n) cada vez maior, tendendo a um número infinitamente grande:

$$ \lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{r_d}{n} \right)^n$$

Isto é o mesmo que fazer os intervalos de tempo serem infinitamente pequenos. O que acontece então? Vamos tentar resolver o limite acima numericamente.Vamos aumentar o número de divisões dentro de um ano da nossa taxa de crescimento discreta. Usaremos $\lambda =2$, (portanto o $r_d=1$) e $N_0=2$.

Exercício

1. Na planilha eletrônica, escreva na célula A1 o rótulo `N0` e na célula B1 o valor 2. Na célula A2 escreva `r` e na célula B2 o valor 1 (um).
2. Na célula A4 escreva `n intervalos` e na célula B4 escreva `Nt`
3. Nas células A5 a A24, coloque os seguintes valores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 50, 100, 200, 500, 1000, 10000, 100000, 1000000;
4. Na célula B5, coloque a fórmula `=$B$1*(1+$B$2/A5)^A5`
5. Na célula C4 escreva “Nt/N0”, e na célula C5 coloque a fórmula `=B5/$B$1`
6. Marque as fórmulas nas células B5 e C5 e arraste-as até a linha 24 para copiá-las;
7. Na célula D1, escreva `e^r`, e na célula E1 escreva `=exp(B2)`

	A	B	C	D	E
1	N0	2		exp(rd)	2,7183
2	r	1			
3					
4	n intervalos	Nt	Nt/N0		
5	1	'=$B$1*(1+$B$2/A6)^A6	'=B5/$B$1		
6	2	4,5000	2,2500		
7	3	4,7407	2,3704		
8	4	4,8828	2,4414		
9	5	4,9766	2,4883		
10	6	5,0433	2,5216		
11	7	5,0930	2,5465		

Compare a taxa de crescimento N_t/N_0 com o valor de e^r, à medida que você aumenta o número de intervalos de tempo. Repita os cálculos para $\lambda =3$ e $\lambda =1,5$ (r=2 e r=0,5).

A esta altura você deve concordar que para o crescimento em um ano ($t=1$) dividido em n intervalos:

$$ \lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{r_d}{n} \right) ^n = e^r$$

Ou seja, para intervalos de tempo bem pequenos [151]:

$$\frac{N_t}{N_0}=e^{rt} $$ $$N_t= N_0 e^{rt}$$

Chegamos à equação de crescimento populacional contínuo. Além disso, chegamos à relação entre a taxa intrínseca de crescimento instantâneo e a taxa de crescimento discreto da população:

$$ \lambda = e^r $$ ou $$ r = \ln(\lambda)$$

Tempo de Duplicação

Tempo de duplicação [152)] é definido como o tempo necessário para uma quantidade duplicar, dada uma taxa constante de crescimento. Podemos aplicar este conceito para o tempo necessário para que uma população com taxa constante de crescimento dobre de tamanho, ou para o tempo até que uma dívida sob taxa fixa de juros dobre de valor.

A solução da expressão de tempo de duplicação é simples. Dados o valor inicial (N_0), a taxa de crescimento r e o tamanho da população projetada ($2N_0$), resolvemos equação para o tempo:

$$2N_0 = N_0e^{rt}$$

Para isso precisamos de um pouco de álgebra apenas. Dividimos os dois lados da equação por N_0:

$$ e^{rt} = 2 $$

e em seguida tomamos o logarítmo em base natural dos dois lados da equação

$$ log(e^{rt}) = log(2) $$ $$ rt = log(2) $$ $$ t = \frac{log(2)}{r} $$

Como $log(2)$ é aproximadamente 0,7 [153)], temos:

$$ t_{dupl} \approx \frac{0,7}{r} $$

Se a taxa de crescimento estiver expressa em percentual, como é comum para juros, temos :

$$ t_{dupl} \approx \frac{70}{r_{\%}} $$

Exercícios

Juros

Uma forma para calcular juros composto de um empréstimo [154)] é através da equação exponencial, similar à apresentada acima, onde:

- r = juros
- N0 = valor emprestado
- Nt = valor final

Uma dívida

Você precisa de 1000 reais emprestados e suas opções em diferentes bancos são:

- 10% ao mês
- 50% ao ano
- 0,5% ao dia

1. Sabendo que só poderá pagar a dívida daqui a dois anos (à vista), calcule o valor que irá desembolsar.
2. Calcule o tempo de duplicação para cada uma das taxas de juros acima.

Mais juros!

Um carro novo

Imagine que é bolsista PIBIC do Departamento de Ecologia da USP (tinha que ter algo de *ecologia* no exemplo!) e resolveu comprar um carro. Há duas opções que parecem caber no seu bolso de um carro básico (sem ar, direção e freios), ambos com parcela fixas:

1. valor à vista de R$ 27.000,00 com juros de 1,1% ao mês e pagamento após 100 meses
2. valor à vista de R$ 31.000,00 com juros de 0,7% ao mês e pagamento após 50 meses

- **Responda:**
  1. Qual o valor final do carro em cada uma das opções;
  2. o valor das prestações;
  3. quantos carros vc. estaria pagando em cada caso?
  4. qual o tempo de duplicação de cada opção?
  5. qual sua segunda opção de profissão?

Qualquer semelhança será mera coincidência

Segundo o físico Al Bartlett, uma das maiores tragédias da humanidade é a incapacidade de compreender as consequências de taxas de crescimento constantes. Sua palestra sobre o tema é um clássico, proferida mais de 1600 vezes! Nesta palestra o Prof Bartlett propõe o seguinte problema:

Era uma vez uma civilização de bactérias que vivia em uma garrafa de um litro. A população crescia a uma taxa constante tal que o tempo de duplicação era de um dia. A população crescia e a civilização prosperava, até que a garrafa encheu. Nesse momento, metade das bactérias cessou a reprodução e partiu em busca de outra garrafa, para evitar um desastre demográfico. Assim que encontraram uma nova garrafa de um litro se instalaram e retomaram a mesma taxa de crescimento, tão aliviadas quanto as suas companheiras que ficaram na garrafa original, também crescendo à mesma taxa. Quanto tempo durará o alívio?

Para saber mais

- Do excelente site de ensino baseado em intuiçãoBetter Explained:
  - An Intuitive Guide To Exponential Functions & e
  - How to think with logs and exponents
- História do número e, do The MacTutor History of Mathematics archive, University St Andrews.
- Função exponencial na Wikipedia.
- Site do físico Al Bartlett. com excelente material sobre as consequências práticas do crescimento de populações e dívidas a taxas constantes.

142)

Caso o vídeo não esteja disponível na sua página entre nesse link

143)

digitar o valor 1 em A2, sair da célula e em seguida clicar e arrastar o canto inferior esquerdo quando o cursor apresentar o sinal de **+**

144)

quando aparece um sinal de + no cursor

145)

um horror matemático! Veja aqui

146)

Este não é o modelo biologicamente mais adequado para crescimento de populações, mas é mais didático para entendermos derivação. Depois passaremos ao modelo de crescimento discreto, fique tranquilo(a)

147)

é possível copiar varias fórmulas de uma única vez, selecionando várias células ao mesmo tempo, antes de arrastar com o mouse

148)

o que se lê “quando Δt tende a zero”, ou seja, aproxima-se de zero tanto quanto você quiser.

149)

o velocímetro de um carro mostra derivadas

150)

em inglês CAS, Computer Algebra System

151)

tão pequenos que aproximam o tempo instantâneo

152)

veja: http://en.wikipedia.org/wiki/Doubling_time

153)

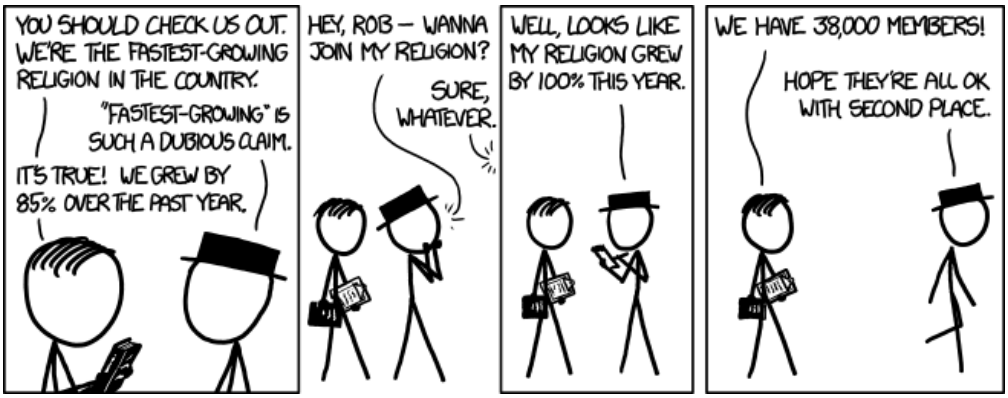
com sete casas decimais = 0,6931472

154)

esse exemplo é simplificado, em geral os juros são calculados pelo saldo e não pela dívida inicial

BASE

Taxas de crescimento e função exponencial



Este roteiro é uma demonstração informal dos principais passos de dedução do modelo de crescimento exponencial, a partir do modelo de crescimento a intervalos discretos. Você vai descobrir que a função exponencial é o limite de um crescimento discreto a uma taxa constante, quando fazemos os intervalos de tempo muito pequenos. Para isso, passaremos pelo conceito de derivadas e pela noção de limite de uma função.

Ao final, chegaremos a um dos primeiros princípios em ecologia: na ausência de forças externas, uma população biológica vai crescer ou descrescer exponencialmente. Infelizmente, juros também se comportam assim.

Do tempo discreto para o contínuo

Para muitos parece mais confortável pensar em mudanças no tamanho da população a intervalos discretos: contamos o número de indivíduos em um instante e no instante seguinte. O modelo geométrico descreve esta dinâmica, se a população cresce sem limites. O número de indivíduos no próximo intervalo de tempo, N_{t+1}, é igual ao número de indivíduos no tempo anterior N_t, multiplicado pela taxa de crescimento da população entre os dois intervalos, que chamamos λ:

$$N_{t+1} \ = \ \lambda N_t$$

Mas quanto esperamos entre uma contagem e outra? Se os nascimentos e mortes podem ocorrer a qualquer momento, devemos fazer censos a intervalos bem curtos. Mostraremos que o tempo contínuo é apenas uma outra maneira de pensar no tempo discreto: tornamos os intervalos tão pequenos quanto quisermos. Esse será nosso ponto de partida para deduzir o modelo de crescimento exponencial, com auxílio de algumas ferramentas computacionais.

Tempo discreto

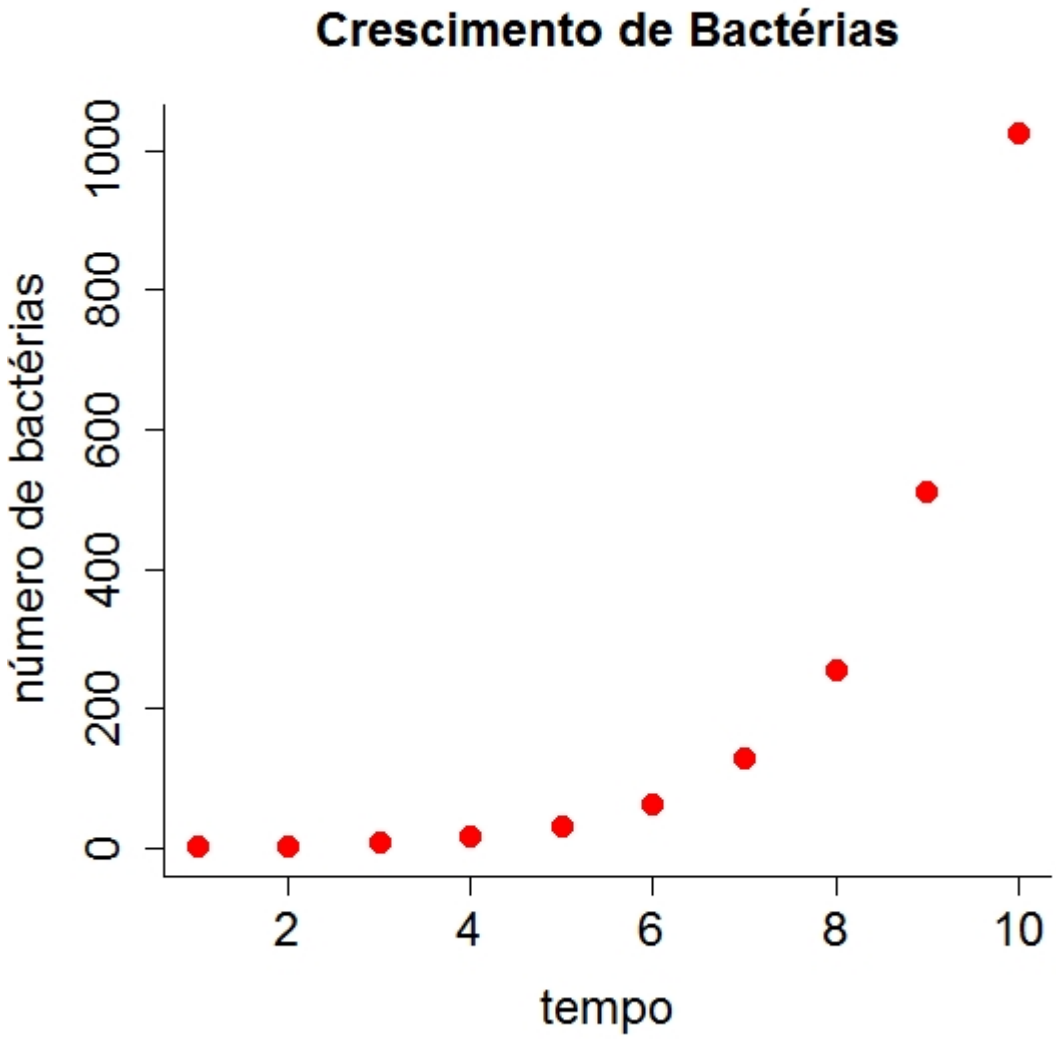
Vamos acompanhar o crescimento inicial e uma população e bactérias no vídeo [155)]:

- http://ecovirtual.ib.usp.br/

O que pode ser descrito pelo número de bactérias observadas a cada intervalo de tempo:

Tempo	No. de Bactérias
0	2
1	4
2	8
3	16
4	32
5	64
...	...
14	16384
...	...
30	1073741824
...	...
60	1152921504606846976

É difícil entender o que está acontecendo, apenas olhando essa tabela. Um gráfico pode ajudar.



continuacao tempo discreto

Pronto, vc. já simulou os dados do crescimento. Agora é só fazer o gráfico. Veja se consegue fazer parecido com o que apresentamos acima. Em seguida faça um outro gráfico com o tempo chegando a 20.

Note que o que temos é uma série temporal, que são registros do tamanho da população em certos instantes de tempo. Uma outra forma de descrever esse processo é saber:

- **Quão rápido cresce o número de bactérias** ou,
- **Qual a velocidade de crescimento das bactérias**

A noção de derivada

Para expressar o quanto a população variou em um dado período de tempo calculamos a taxa de variação da população no tempo t e após um intervalo Δt:

$$\text{Taxa de Variação}= \frac{{N(t + \Delta t) - N(t)}}{\Delta t} $$

Ou seja: tome os valores do número de bactérias em dois tempos próximos e divida pelo tempo decorrido entre uma observação e outra!

Entretanto o $ \Delta t $ é arbitrário. Se a população tem períodos reprodutivos bem definidos (p.ex. anuais), o intervalo de observação discreto é natural. Mas e se nascimentos e mortes podem ocorrer a qualquer momento? Quanto menores nossos intervalos de observação, mais precisa será a nossa descrição da dinâmica. Nestes casos parece uma boa ideia fazer o intervalo Δt ser o menor possivel, bem próximo de zero.

Mas se aproximamos Δt de zero, ${N(t + \Delta t) - N(t)}$ tenderia também a zero, já que os tamanhos populacionais nos dois momentos seriam muito parecidos. Portanto o resultado dessa taxa deve ser $0/0$ [156)].

Vamos verificar se essa lógica está correta. Para começar, vamos supor uma população cujo tamanho é igual ao quadrado do tempo decorrido ($N(t)= t^2 $) [157)]. Vamos então aplicar esta função para intervalos cada vez menores de tempo a partir de t=1, e ver o que acontece para a taxa de variação do tamanho populacional:

continua nocao de derivada

Ao contrário do que esperávamos, o valor da taxa converge para um número bem definido com a redução de Δt !

Repita o procedimento para outros valores tempo. Você deve encontrar este resultado:

t	${N(t + \Delta t) - N(t)} / {\Delta t} $
1	2
2	4

t	${N(t + \Delta t) - N(t)} / {\Delta t} $
3	6
4	8
5	10

Ou seja, a taxa instantânea de crescimento para t^2 tende a $2t$ à medida que Δt é reduzido. Podemos reduzir Δt o quanto quisermos, e este resultado fica cada vez mais exato. Encontramos a **derivada** da função $N(t)=t^2$!

Definição de uma derivada

A derivada de uma função $X(t)$ é sua taxa de variação instantânea, obtida pelo limite da taxa de variação:

$$\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

quando $\Delta t \to 0$ [158]. Uma das maneiras de representar uma derivada é na notação de uma taxa em relação ao tempo:

$$\frac{dX}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

Crescimento Exponencial

Uma maneira simples de pensar em derivadas é que elas são velocidades instantâneas [159]. Vamos então descobrir a expressão para a velocidade instantânea de crescimento da nossa população de bactérias:

Tempo	No. de Bactérias	Velocidade
0	2	
1	4	2
2	8	4
3	16	8
4	32	16
5	64	32

As bactérias duplicam-se a cada instante de tempo. Por isso, se a população dobrar, a sua velocidade de crescimento também dobra. Se ela quadruplicar, a velocidade quadruplicará, e assim por diante. Ou seja, *a velocidade de crescimento é proporcional ao tamanho da população*.

Já que estamos interessados em velocidades instantâneas, vamos representar esta proporcionalidade com uma derivada: \begin{equation} \frac{dN}{dt}= rN \label{dndt} \end{equation}

Em que a constante de proporcionalidade r é chamada taxa intrínseca de crescimento populacional, ou seja, o quanto cada indivíduo contribui instantaneamente para a variação no tamanho da população. Este é o modelo mais simples de crescimento populacional. O modelo é uma *equação diferencial*, pois estabelece uma igualdade entre a derivada de uma função (lado esquerdo) e alguma expressão algébrica, no lado direito da equação. Traduzindo em palavras, este modelo seria

“uma função do crescimento populacional N *tem derivada proporcional a ela mesma*”. A função que tem esta propriedade, ou seja, que satisfaz esta equação é:

$$\begin{equation} \label{ert} N_t=N_0e^{rt} \end{equation}$$

Que é a função de crescimento populacional exponencial. Vamos ver como chegamos a isso!

Soluções de equações diferenciais

Uma equação diferencial de primeira ordem estabelece uma relação entre a derivada de uma função e alguma outra função matemática. Resolver uma equação destas é encontrar a função cuja derivada satisfaça a relação proposta.

O problema é que não há um algoritmo simples para fazer isso. Há muitas regras e tabelas que relacionam derivadas mais simples às suas respectivas funções (as antiderivadas). Além disso, em geral é preciso muita manipulação matemática para expressar a equação diferencial em termos destas formas catalogadas. Mesmo assim, nem sempre se chega a uma solução que pode ser expressa como uma função conhecida, o que chamamos de solução analítica. Felizmente, a equação diferencial ($\ref{dndt}$) é simples o bastante para ter solução analítica conhecida.

Melhor ainda, hoje há programas de computador que manipulam regras de matemática simbólica, incluindo as antiderivadas que precisamos para resolver equações diferenciais. São os *Sistemas de Álgebra Computacional*[160)]. O Maxima é um desses programas, e pode nos ajudar a solucionar a equação diferencial. Vamos usá-lo *online*.

> As janelas de código abaixo executam o Maxima *online*: o código é enviado ao servidor Sage Cell, que tem o Maxima pronto para executar comandos. O servidor então retorna o resultado para nossa página.
>
> Se preferir, você pode instalar o Maxima em seu computador e executar os mesmos comandos. É uma ferramenta muito útil para resolver problemas matemáticos. Veja nossa Introdução ao Maxima.

Solução no Maxima

O comando abaixo define um objeto chamado `eq1` no Maxima, para armazenar a expressão simbólica da nossa equação diferencial $dN/dt=rN$. Clique no botão `Evaluate` para criar o objeto:

Agora use o comando `ode2` do Maxima para resolver a equação diferencial. O primeiro argumento é a equação diferencial, o segundo a variável dependente ($N(t)$) e o terceiro a variável independente (t):

O resultado deve ser:

$$ N(t)=c e^{rt} $$

Onde c é uma constante de integração desconhecida. A expressão acima satisfaz a equação diferencial, para qualquer valor de c, e isso é tudo que as regras de antiderivação podem nos dar.

Condições iniciais

Para ir adiante temos que dar algo mais: as condições iniciais do sistema. Vamos então definir o número inicial de indivíduos na população, N_0. Este é o tamanho da população no tempo zero, que substituímos na equação de crescimento exponencial:

$$N_0 = c*e^{0} = c*1 = c$$

Logo $c = N_0$, e finalmente temos nossa equação de crescimento exponencial:

$$ N_t= N_0 e^{rt} $$

A função exponencial

Satisfeito(a)? Espero que não, pois simplesmente apelamos para uma tabela de antiderivadas em um programa para encontrar a solução de nossa equação diferencial. Aprendemos a lógica geral da solução de uma equação diferencial, mas não porque a equação que propusemos tem esta solução específica.

Uma maneira de entender é retornar ao raciocínio de reduzir intervalos de tempo. Vamos começar com uma população que tem uma taxa de crescimento anual de $\lambda = 1,5$:

- $N_1=N_0 \lambda$, ou:
- $N_1=N_0 (1+ rd)$, onde *rd* = coeficiente discreto de crescimento
- $N_1= N_0(1 + 0,5)$

Agora, vamos supor que essa mesma população tenha dois ciclos reprodutivos anuais, portanto temos que calcular o aumento na população no primeiro semestre do ano, e multiplicar este valor novamente pela taxa de crescimento, para obter o tamanho da população no final do ano. Vamos supor que a taxa semestral de crescimento seja metade da anual:

$$N_1 \ = \ N_0 \left(1+\frac{0,5}{2} \right) \left(1+\frac{0,5}{2} \right)$$

Isso equivale a

$$N_1 \ = \ N_0 \left(1+\frac{0,5}{2} \right)^2 \ = \ N_0(1+0,25)^2 \ \to \frac{N_1}{N_0} \ = \ (1+0,25)^2 \ \simeq \ 1,56$$

Ops! Uma taxa de crescimento de 1,25 ao semestre resulta em um crescimento maior que a taxa anual de 1,5. Não é difícil entender: no segundo semestre a população aumentou em 25% de uma população que já cresceu 25% no primeiro semestre. Mantendo o raciocínio, trimestralmente a taxa seria de $(1 + 0.5/4)$ e deveria ser aplicada quatro vezes. Isso resultaria em um crescimento anual de cerca de 1,60. Onde isso vai parar?

Jacob Bernoulli foi o primeiro a solucionar este problema, preocupado com o comportamento de juros compostos, nos idos do século XVII. Ele partiu da expressão usada para calcular estes juros, que nada mais é que a generalização de nossa expressão de crescimento em um ano dividido em n intervalos, :

$$ \frac{N_1}{N_0}= \left(1+\frac{r_d}{n} \right) ^n $$

Em seguida ele notou que para calcular uma dívida (o tamanho da população em nosso caso) que aumenta a todo instante, teríamos que deixar o número de intervalos de tempo (n) cada vez maior, tendendo a um número infinitamente grande:

$$ \lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{r_d}{n} \right)^n$$

Isto é o mesmo que fazer os intervalos de tempo serem infinitamente pequenos. O que acontece então? Vamos tentar resolver o limite acima numericamente.Vamos aumentar o número de divisões dentro de um ano da nossa taxa de crescimento discreta. Usaremos $\lambda =2$, (portanto o $r_d=1$) e $N_0=2$.

continua função exponencial

Compare a taxa de crescimento N_t/N_0 com o valor de e^r, à medida que você aumenta o número de intervalos de tempo. Repita os cálculos para $\lambda =3$ e $\lambda =1,5$ (r=2 e r=0,5).

A esta altura você deve concordar que para o crescimento em um ano ($t=1$) dividido em n intervalos:

$$ \lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{r_d}{n} \right) ^n = e^r$$

Ou seja, para intervalos de tempo bem pequenos [161)]:

$$\frac{N_t}{N_0}=e^{rt} $$ $$N_t= N_0 e^{rt}$$

Chegamos à equação de crescimento populacional contínuo. Além disso, chegamos à relação entre a taxa intrínseca de crescimento instantâneo e a taxa de crescimento discreto da população:

$$ \lambda = e^r $$ ou $$ r = \ln(\lambda)$$

Tempo de Duplicação

Tempo de duplicação [162)] é definido como o tempo necessário para uma quantidade duplicar, dada uma taxa constante de crescimento. Podemos aplicar este conceito para o tempo necessário para que uma população com taxa constante de crescimento dobre de tamanho, ou para o tempo até que uma dívida sob taxa fixa de juros dobre de valor.

A solução da expressão de tempo de duplicação é simples. Dados o valor inicial (N_0), a taxa de crescimento r e o tamanho da população projetada ($2N_0$), resolvemos equação para o tempo:

$$2N_0 = N_0e^{rt}$$

Para isso precisamos de um pouco de álgebra apenas. Dividimos os dois lados da equação por N_0:

$$ e^{rt} = 2 $$

e em seguida tomamos o logarítmo em base natural dos dois lados da equação

$$ log(e^{rt}) = log(2) $$ $$ rt = log(2) $$ $$ t = \frac{log(2)}{r} $$

Como $log(2)$ é aproximadamente 0,7 [163)], temos:

$$ t_{dupl} \approx \frac{0,7}{r} $$

Se a taxa de crescimento estiver expressa em percentual, como é comum para juros, temos :

$$ t_{dupl} \approx \frac{70}{r_{\%}} $$

Exercícios

Juros

Uma forma para calcular juros composto de um empréstimo [164)] é através da equação exponencial, similar à apresentada acima, onde:

- r = juros
- N0 = valor emprestado
- Nt = valor final

Uma dívida

Você precisa de 1000 reais emprestados e suas opções em diferentes bancos são:

- 10% ao mês
- 50% ao ano
- 0,5% ao dia

1. Sabendo que só poderá pagar a dívida daqui a dois anos (à vista), calcule o valor que irá desembolsar.
2. Calcule o tempo de duplicação para cada uma das taxas de juros acima.

Mais juros!

Um carro novo

Imagine que é bolsista PIBIC do Departamento de Ecologia da USP (tinha que ter algo de *ecologia* no exemplo!) e resolveu comprar um carro. Há duas opções que parecem caber no seu bolso de um carro básico (sem ar, direção e freios), ambos com parcela fixas:

1. valor à vista de R$ 27.000,00 com juros de 1,1% ao mês e pagamento após 100 meses
2. valor à vista de R$ 31.000,00 com juros de 0,7% ao mês e pagamento após 50 meses

- **Responda:**
  1. Qual o valor final do carro em cada uma das opções;
  2. o valor das prestações;
  3. quantos carros vc. estaria pagando em cada caso?
  4. qual o tempo de duplicação de cada opção?
  5. qual sua segunda opção de profissão?

Qualquer semelhança será mera coincidência

Segundo o físico Al Bartlett, uma das maiores tragédias da humanidade é a incapacidade de compreender as consequências de taxas de crescimento constantes. Sua palestra sobre o tema é um clássico, proferida mais de 1600 vezes! Nesta palestra o Prof Bartlett propõe o seguinte problema:

Era uma vez uma civilização de bactérias que vivia em uma garrafa de um litro. A população

crescia a uma taxa constante tal que o tempo de duplicação era de um dia. A população crescia e a civilização prosperava, até que a garrafa encheu. Nesse momento, metade das bactérias cessou a reprodução e partiu em busca de outra garrafa, para evitar um desastre demográfico. Assim que encontraram uma nova garrafa de um litro se instalaram e retomaram a mesma taxa de crescimento, tão aliviadas quanto as suas companheiras que ficaram na garrafa original, também crescendo à mesma taxa. Quanto tempo durará o alívio?

Para saber mais

- Do excelente site de ensino baseado em intuiçãoBetter Explained:
  - An Intuitive Guide To Exponential Functions & e
  - How to think with logs and exponents
- História do número e, do The MacTutor History of Mathematics archive, University St Andrews.
- Função exponencial na Wikipedia.
- Site do físico Al Bartlett. com excelente material sobre as consequências práticas do crescimento de populações e dívidas a taxas constantes.

R, maxima, calculo, uma população, crescimento exponencial, tempo discreto, tempo contínuo, equação diferencial

155)

Caso o vídeo não esteja disponível na sua página entre nesse link

156)

um horror matemático! Veja aqui

157)

Este não é o modelo biologicamente mais adequado para crescimento de populações, mas é mais didático para entendermos derivação. Depois passaremos ao modelo de crescimento discreto, fique tranquilo(a)

158)

o que se lê “quando Δt tende a zero”, ou seja, aproxima-se de zero tanto quanto você quiser.

159)

o velocímetro de um carro mostra derivadas

160)

em inglês CAS, Computer Algebra System

161)

tão pequenos que aproximam o tempo instantâneo

162)

veja: http://en.wikipedia.org/wiki/Doubling_time

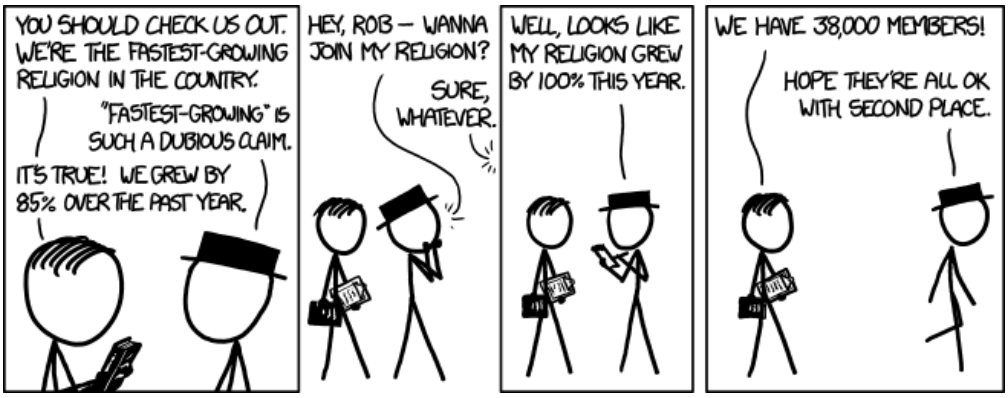
163)

com sete casas decimais = 0,6931472

164)

esse exemplo é simplificado, em geral os juros são calculados pelo saldo e não pela dívida inicial

Taxas de crescimento e função exponencial - Roteiro em R



Este roteiro é uma demonstração informal dos principais passos de dedução do modelo de crescimento exponencial, a partir do modelo de crescimento a intervalos discretos. Você vai descobrir que a função exponencial é o limite de um crescimento discreto a uma taxa constante, quando fazemos os intervalos de tempo muito pequenos. Para isso, passaremos pelo conceito de derivadas e pela noção de limite de uma função.

Ao final, chegaremos a um dos primeiros princípios em ecologia: na ausência de forças externas, uma população biológica vai crescer ou descrescer exponencialmente. Infelizmente, juros também se comportam assim.

Do tempo discreto para o contínuo

Para muitos parece mais confortável pensar em mudanças no tamanho da população a intervalos discretos: contamos o número de indivíduos em um instante e no instante seguinte. O modelo geométrico descreve esta dinâmica, se a população cresce sem limites. O número de indivíduos no próximo intervalo de tempo, N_{t+1}, é igual ao número de indivíduos no tempo anterior N_t, multiplicado pela taxa de crescimento da população entre os dois intervalos, que chamamos λ:

$$N_{t+1} \ = \ \lambda N_t$$

Mas quanto esperamos entre uma contagem e outra? Se os nascimentos e mortes podem ocorrer a qualquer momento, devemos fazer censos a intervalos bem curtos. Mostraremos que o tempo contínuo é apenas uma outra maneira de pensar no tempo discreto: tornamos os intervalos tão pequenos quanto quisermos. Esse será nosso ponto de partida para deduzir o modelo de crescimento exponencial, com auxílio de algumas ferramentas computacionais.

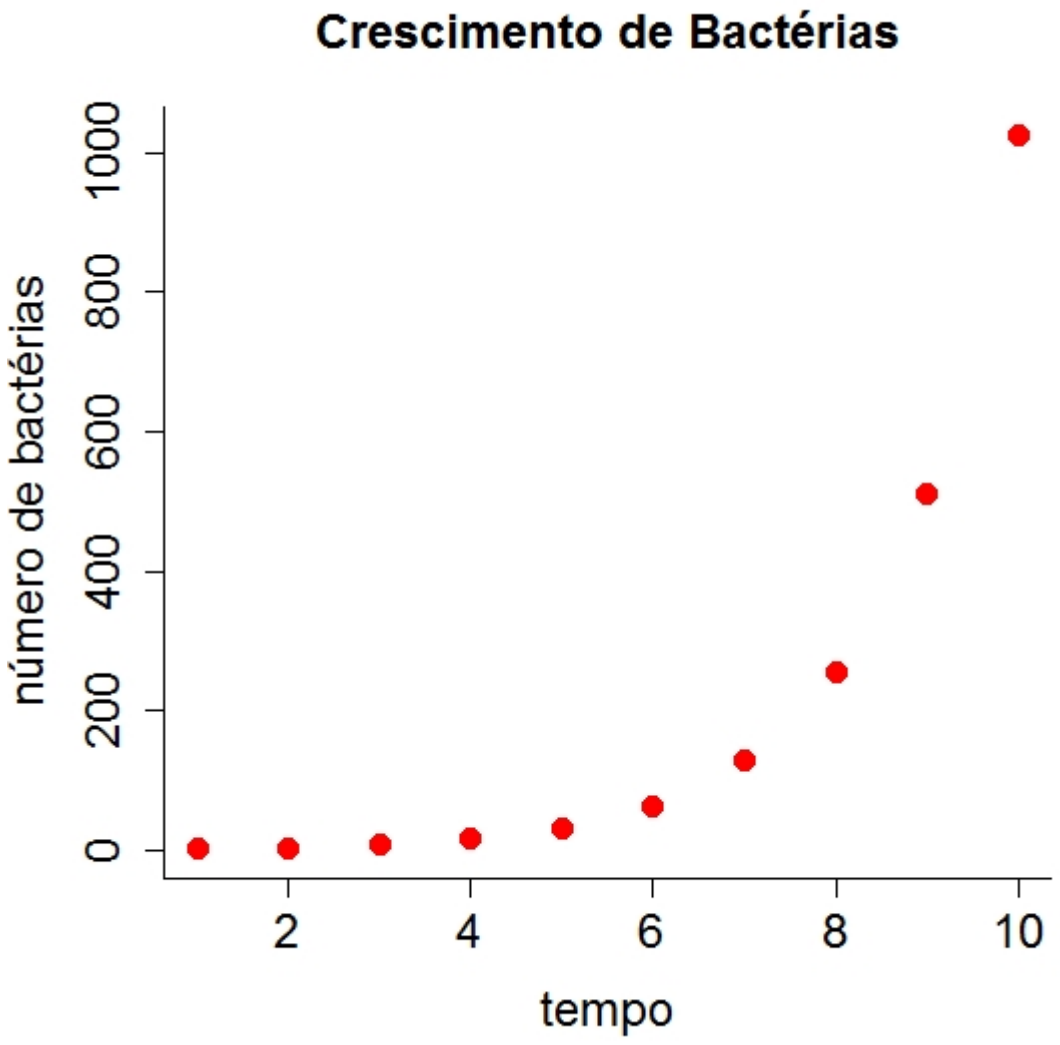
Tempo discreto

Vamos acompanhar o crescimento inicial e uma população e bactérias no vídeo [165)]:

O que pode ser descrito pelo número de bactérias observadas a cada intervalo de tempo:

Tempo	No. de Bactérias
0	2
1	4
2	8
3	16
4	32
5	64
...	...
14	16384
...	...
30	1073741824
...	...
60	1152921504606846976

É difícil entender o que está acontecendo, apenas olhando essa tabela. Um gráfico pode ajudar.



Se quiser reproduzir este gráfico

Abra o R e cole o código abaixo, linha a linha:

```
tempo=1:10
nbact= c(2,4,8,16,32,64,128,256, 512,1024)
plot(tempo, nbact, main="Crescimento de Bactérias", ylab= "número de
bactérias", pch=16, col="red",cex.main=1.5, cex=1.5,cex.lab=1.5,
cex.axis=1.5,bty="l")
```

Pronto, vc. já simulou os dados do crescimento. Agora é só fazer o gráfico. Veja se consegue fazer parecido com o que apresentamos acima. Em seguida faça um outro gráfico com o tempo chegando a 20.

Note que o que temos é uma série temporal, que são registros do tamanho da população em certos instantes de tempo. Uma outra forma de descrever esse processo é saber:

- **Quão rápido cresce o número de bactérias** ou,
- **Qual a velocidade de crescimento das bactérias**

A noção de derivada

Para expressar o quanto a população variou em um dado período de tempo calculamos a taxa de variação da população no tempo t e após um intervalo Δt:

$$\text{Taxa de Variação}= \frac{{N(t + \Delta t) - N(t)}}{\Delta t} $$

Ou seja: tome os valores do número de bactérias em dois tempos próximos e divida pelo tempo decorrido entre uma observação e outra!

Entretanto o $ \Delta t $ é arbitrário. Se a população tem períodos reprodutivos bem definidos (p.ex. anuais), o intervalo de observação discreto é natural. Mas e se nascimentos e mortes podem ocorrer a qualquer momento? Quanto menores nossos intervalos de observação, mais precisa será a nossa descrição da dinâmica. Nestes casos parece uma boa ideia fazer o intervalo Δt ser o menor possivel, bem próximo de zero.

Mas se aproximamos Δt de zero, ${N(t + \Delta t) - N(t)}$ tenderia também a zero, já que os tamanhos populacionais nos dois momentos seriam muito parecidos. Portanto o resultado dessa taxa deve ser $0/0$ [166)].

Vamos verificar se essa lógica está correta. Para começar, vamos supor uma população cujo tamanho é igual ao quadrado do tempo decorrido ($N(t)= t^2 $) [167)]. Vamos então aplicar esta função para intervalos cada vez menores de tempo a partir de t=1, e ver o que acontece para a taxa de variação do tamanho populacional:

```
## para t=1
tempo=1
##vamos criar um vetor com valores de delta t diminuindo
dt=c(0.5,0.1,0.01,0.001,0.0001,0.00001,0.000001)
tdt=tempo+dt
Nt=tempo^2
Ntdt=tdt^2
(Ntdt-Nt)/dt
```

Ao contrário do que esperávamos, o valor da taxa converge para um número bem definido com a redução de Δt !

Repita o procedimento para outros valores tempo. Você deve encontrar este resultado:

t	${N(t + \Delta t) - N(t)} / {\Delta t} $
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Ou seja, a taxa instantânea de crescimento para t^2 tende a $2t$ à medida que Δt é reduzido. Podemos reduzir Δt o quanto quisermos, e este resultado fica cada vez mais exato. Encontramos a **derivada** da função $N(t)=t^2$!

Definição de uma derivada

A derivada de uma função $X(t)$ é sua taxa de variação instantânea, obtida pelo limite da taxa de variação:

$$\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

quando $\Delta t \to 0$ [168]. Uma das maneiras de representar uma derivada é na notação de uma taxa em relação ao tempo:

$$\frac{dX}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

Crescimento Exponencial

Uma maneira simples de pensar em derivadas é que elas são velocidades instantâneas [169]. Vamos então descobrir a expressão para a velocidade instantânea de crescimento da nossa população de bactérias:

Tempo	No. de Bactérias	Velocidade
0	2	
1	4	2
2	8	4
3	16	8
4	32	16
5	64	32

As bactérias duplicam-se a cada instante de tempo. Por isso, se a população dobrar, a sua velocidade de crescimento também dobra. Se ela quadruplicar, a velocidade quadruplicará, e assim por diante. Ou seja, *a velocidade de crescimento é proporcional ao tamanho da população*.

Já que estamos interessados em velocidades instantâneas, vamos representar esta proporcionalidade com uma derivada: \begin{equation} \frac{dN}{dt}= rN \label{dndt} \end{equation}

Em que a constante de proporcionalidade r é chamada taxa intrínseca de crescimento populacional, ou seja, o quanto cada indivíduo contribui instantaneamente para a variação no tamanho da população. Este é o modelo mais simples de crescimento populacional. O modelo é uma *equação diferencial*, pois estabelece uma igualdade entre a derivada de uma função (lado esquerdo) e alguma expressão algébrica, no lado direito da equação. Traduzindo em palavras, este modelo seria *"uma função do crescimento populacional* N *tem derivada proporcional a ela mesma*". A função que tem esta propriedade, ou seja, que satisfaz esta equação é:

\begin{equation} \label{ert} N_t=N_0e^{rt} \end{equation}

Que é a função de crescimento populacional exponencial. Vamos ver como chegamos a isso!

Soluções de equações diferenciais

Uma equação diferencial de primeira ordem estabelece uma relação entre a derivada de uma função

e alguma outra função matemática. Resolver uma equação destas é encontrar a função cuja derivada satisfaça a relação proposta.

O problema é que não há um algoritmo simples para fazer isso. Há muitas regras e tabelas que relacionam derivadas mais simples às suas respectivas funções (as antiderivadas). Além disso, em geral é preciso muita manipulação matemática para expressar a equação diferencial em termos destas formas catalogadas. Mesmo assim, nem sempre se chega a uma solução que pode ser expressa como uma função conhecida, o que chamamos de solução analítica. Felizmente, a equação diferencial ($\ref{dndt}$) é simples o bastante para ter solução analítica conhecida.

Melhor ainda, hoje há programas de computador que manipulam regras de matemática simbólica, incluindo as antiderivadas que precisamos para resolver equações diferenciais. São os *Sistemas de Álgebra Computacional*[170)]. O Maxima é um desses programas, e pode nos ajudar a solucionar a equação diferencial. Vamos usá-lo *online*.

As janelas de código abaixo executam o Maxima *online*: o código é enviado ao servidor Sage Cell, que tem o Maxima pronto para executar comandos. O servidor então retorna o resultado para nossa página.

Se preferir, você pode instalar o Maxima em seu computador e executar os mesmos comandos. É uma ferramenta muito útil para resolver problemas matemáticos. Veja nossa Introdução ao Maxima.

Solução no Maxima

O comando abaixo define um objeto chamado `eq1` no Maxima, para armazenar a expressão simbólica da nossa equação diferencial $dN/dt=rN$. Clique no botão `Evaluate` para criar o objeto:

Agora use o comando `ode2` do Maxima para resolver a equação diferencial. O primeiro argumento é a equação diferencial, o segundo a variável dependente ($N(t)$) e o terceiro a variável independente (t):

O resultado deve ser:

$$ N(t)=c e^{rt} $$

Onde c é uma constante de integração desconhecida. A expressão acima satisfaz a equação diferencial, para qualquer valor de c, e isso é tudo que as regras de antiderivação podem nos dar.

Condições iniciais

Para ir adiante temos que dar algo mais: as condições iniciais do sistema. Vamos então definir o número inicial de indivíduos na população, N_0. Este é o tamanho da população no tempo zero, que substituímos na equação de crescimento exponencial:

$$N_0 = c*e^{0} = c*1 = c$$

Logo $c = N_0$, e finalmente temos nossa equação de crescimento exponencial:

$$ N_t= N_0 e^{rt} $$

A função exponencial

Satisfeito(a)? Espero que não, pois simplesmente apelamos para uma tabela de antiderivadas em um programa para encontrar a solução de nossa equação diferencial. Aprendemos a lógica geral da solução de uma equação diferencial, mas não porque a equação que propusemos tem esta solução específica.

Uma maneira de entender é retornar ao raciocínio de reduzir intervalos de tempo. Vamos começar com uma população que tem uma taxa de crescimento anual de $\lambda = 1,5$:

- $N_1=N_0 \lambda$, ou:
- $N_1=N_0 (1+ rd)$, onde *rd* = coeficiente discreto de crescimento
- $N_1= N_0(1 + 0,5)$

Agora, vamos supor que essa mesma população tenha dois ciclos reprodutivos anuais, portanto temos que calcular o aumento na população no primeiro semestre do ano, e multiplicar este valor novamente pela taxa de crescimento, para obter o tamanho da população no final do ano. Vamos supor que a taxa semestral de crescimento seja metade da anual:

$$N_1 \ = \ N_0 \left(1+\frac{0,5}{2} \right) \left(1+\frac{0,5}{2} \right)$$

Isso equivale a

$$N_1 \ = \ N_0 \left(1+\frac{0,5}{2} \right)^2 \ = \ N_0(1+0,25)^2 \ \to \frac{N_1}{N_0} \ = \ (1+0,25)^2 \ \simeq \ 1,56$$

Ops! Uma taxa de crescimento de 1,25 ao semestre resulta em um crescimento maior que a taxa anual de 1,5. Não é difícil entender: no segundo semestre a população aumentou em 25% de uma população que já cresceu 25% no primeiro semestre. Mantendo o raciocínio, trimestralmente a taxa seria de $(1 + 0.5/4)$ e deveria ser aplicada quatro vezes. Isso resultaria em um crescimento anual de cerca de 1,60. Onde isso vai parar?

Jacob Bernoulli foi o primeiro a solucionar este problema, preocupado com o comportamento de juros compostos, nos idos do século XVII. Ele partiu da expressão usada para calcular estes juros, que nada mais é que a generalização de nossa expressão de crescimento em um ano dividido em n intervalos, :

$$ \frac{N_1}{N_0}= \left(1+\frac{r_d}{n} \right) ^n $$

Em seguida ele notou que para calcular uma dívida (o tamanho da população em nosso caso) que aumenta a todo instante, teríamos que deixar o número de intervalos de tempo (n) cada vez maior, tendendo a um número infinitamente grande:

$$ \lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{r_d}{n} \right)^n$$

Isto é o mesmo que fazer os intervalos de tempo serem infinitamente pequenos. O que acontece então? Vamos tentar resolver o limite numericamente no R, aumentando o número de divisões dentro de um ano da nossa taxa de crescimento discreta. A princípio vamos deixar o $\lambda =2$, portanto o $r_d=1$ e o $N_0=1$; portanto $\frac{N_t}{N_0}= N_t$. Em seguida vamos fazer $\lambda =3$ e $\lambda =1.5$ (r=2 e r=0.5).

```
##############################
#### Crescimento Contínuo ####
##############################

n<- c(0:100, 200, 500,1000, 10000, 100000,1e+10)
N0 <- 2
rd1 <- 1
N1<-N0* (1+ rd1/n)^n
N1_N0= N1[length(N1)]/N0
plot(1:103, N1[1:103]/N0, type="l")
text(x=50, y=2.5, labels= paste("Máximo = ", N1[length(N1)/N0]))
N1_N0
```

Tempo de Duplicação

Tempo de duplicação [171)] é definido como o tempo necessário para uma quantidade duplicar, dada uma taxa constante de crescimento. Podemos aplicar este conceito para o tempo necessário para que uma população com taxa constante de crescimento dobre de tamanho, ou para o tempo até que uma dívida sob taxa fixa de juros dobre de valor.

A solução da expressão de tempo de duplicação é simples. Dados o valor inicial (N_0), a taxa de crescimento r e o tamanho da população projetada ($2N_0$), resolvemos equação para o tempo:

$$2N_0 = N_0e^{rt}$$

Para isso precisamos de um pouco de álgebra apenas. Dividimos os dois lados da equação por N_0:

$$ e^{rt} = 2 $$

e em seguida tomamos o logarítmo em base natural dos dois lados da equação

$$ log(e^{rt}) = log(2) $$ $$ rt = log(2) $$ $$ t = \frac{log(2)}{r} $$

Como $log(2)$ é aproximadamente 0,7 [172)], temos:

$$ t_{dupl} \approx \frac{0,7}{r} $$

Se a taxa de crescimento estiver expressa em percentual, como é comum para juros, temos :

$$ t_{dupl} \approx \frac{70}{r_{\%}} $$

Exercícios

Juros

Uma forma para calcular juros composto de um empréstimo [173)] é através da equação exponencial, similar à apresentada acima, onde:

- r = juros
- N0 = valor emprestado
- Nt = valor final

Uma dívida

Você precisa de 1000 reais emprestados e suas opções em diferentes bancos são:

- 10% ao mês
- 50% ao ano
- 0,5% ao dia

1. Sabendo que só poderá pagar a dívida daqui a dois anos (à vista), calcule o valor que irá desembolsar.
2. Calcule o tempo de duplicação para cada uma das taxas de juros acima.

Mais juros!

Um carro novo

Imagine que é bolsista PIBIC do Departamento de Ecologia da USP (tinha que ter algo de *ecologia* no exemplo!) e resolveu comprar um carro. Há duas opções que parecem caber no seu bolso de um carro básico (sem ar, direção e freios), ambos com parcela fixas:

1. valor à vista de R$ 27.000,00 com juros de 1,1% ao mês e pagamento após 100 meses
2. valor à vista de R$ 31.000,00 com juros de 0,7% ao mês e pagamento após 50 meses

- **Responda:**
  1. Qual o valor final do carro em cada uma das opções;
  2. o valor das prestações;
  3. quantos carros vc. estaria pagando em cada caso?
  4. qual o tempo de duplicação de cada opção?
  5. qual sua segunda opção de profissão?

Qualquer semelhança será mera coincidência

Segundo o físico Al Bartlett, uma das maiores tragédias da humanidade é a incapacidade de compreender as consequências de taxas de crescimento constantes. Sua palestra sobre o tema é um clássico, proferida mais de 1600 vezes! Nesta palestra o Prof Bartlett propõe o seguinte problema:

Era uma vez uma civilização de bactérias que vivia em uma garrafa de um litro. A população crescia a uma taxa constante tal que o tempo de duplicação era de um dia. A população crescia e

a civilização prosperava, até que a garrafa encheu. Nesse momento, metade das bactérias cessou a reprodução e partiu em busca de outra garrafa, para evitar um desastre demográfico. Assim que encontraram uma nova garrafa de um litro se instalaram e retomaram a mesma taxa de crescimento, tão aliviadas quanto as suas companheiras que ficaram na garrafa original, também crescendo à mesma taxa. Quanto tempo durará o alívio?

Para saber mais

- Do excelente site de ensino baseado em intuiçãoBetter Explained:
  - An Intuitive Guide To Exponential Functions & e
  - How to think with logs and exponents
- História do número e, do The MacTutor History of Mathematics archive, University St Andrews.
- Função exponencial na Wikipedia.
- Site do físico Al Bartlett. com excelente material sobre as consequências práticas do crescimento de populações e dívidas a taxas constantes.

R, maxima, uma população, crescimento exponencial, tempo discreto, tempo contínuo, equação diferencial

165)

Caso o vídeo não esteja disponível na sua página entre nesse link

166)

um horror matemático! Veja aqui

167)

Este não é o modelo biologicamente mais adequado para crescimento de populações, mas é mais didático para entendermos derivação. Depois passaremos ao modelo de crescimento discreto, fique tranquilo(a)

168)

o que se lê “quando Δt tende a zero”, ou seja, aproxima-se de zero tanto quanto você quiser.

169)

o velocímetro de um carro mostra derivadas

170)

em inglês CAS, Computer Algebra System

171)

veja: http://en.wikipedia.org/wiki/Doubling_time

172)

com sete casas decimais = 0,6931472

173)

esse exemplo é simplificado, em geral os juros são calculados pelo saldo e não pela dívida inicial

-
- Exercicios

Integral

A integral está relacionada ao problema do calculo de área sobre curvas, volumes e muitas outras apllicações.

Introdução a Integral

Integrais Indefinidas

As integrais podem ser vistas como antiderivadas, ou seja, a operação inversa da derivada. Vamos agora ver isso no Maxima, peguemos os casos do exercício feito na aula anterior:

Derivadas

Ache as derivadas e em seguida as antiderivadas

1. $ f(x) = exp(x) + x^7$
2. $ f(x) = x + sin(x) $
3. $ f(x) = 5x^3 + 2$
4. $ f(x) = cos(x) + sin(x) $
5. $ f(x) = x^2 + x^3cos(x)$
6. $ f(x) = exp(x) ln(x) $
7. $ f(x) = x^5sin(x)$
8. $ f(x) = \frac{1}{x} $
9. $ f(x) = \frac{1}{x^2} $
10. $ f(x) = \frac{exp(x)}{x} $
11. $ f(x) = \frac{sin(x)}{x^2}$

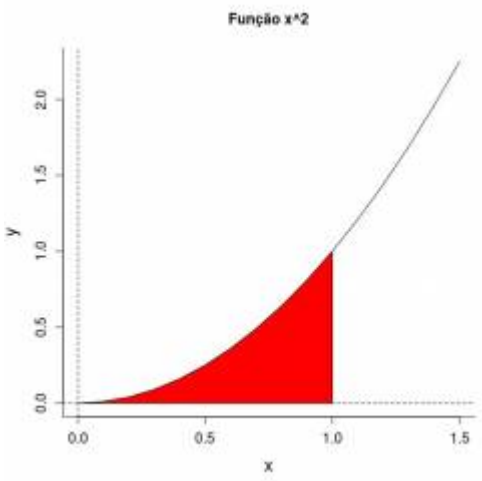
Integral no Máxima

A função do máxima que opera integrais é *integrate* que tem como argumentos principais a função e a variável a ser integrada. Há duas formas da função no Máxima,

```
integrate(2*x, x);
'integrate(2*x,x);
```

A primeira retorna a solução da Integral, a segunda, a representação simbólica da Integral.

Integrais definidas



Podemos pensar a integral definida como a área resultante sob a curva da função em um dado intervalo. Vamos visualizar isso graficamente com a nossa já conhecida função quadratica $f(x)=x^2$ a área no intervalo de 0 até 1. Que em notação matemática é representado como:

$\int_0^1 f(x)~dx$

Área Aproximada

Vamos tentar resolver o problema de forma bastante intuitíva e com as ferramentas que temos [174)]. Não sabemos calcular a área sob curvas, apenas áreas de figuras geométricas regulares. Vamos então, transformar a curva em retângulos contíguos e calcular a somatória da área desses retângulos!

Primeiro vamos desenhar o gráfico acima do nosso problema.

```
##############################
## área sob a curva f(x)= x^2;
## no intervalo 0 a 1
############################
par(mfrow=c(2,2))
seq.x=seq(0,1.5, by=0.1)
seq.y=seq.x^2
plot(seq.x,seq.y, type="l", bty="l", cex.lab=1.5, cex.axis=1.2, main=
"Função x^2", xlab="x", ylab="y")
abline(v=0, lty=2)
abline(h=0, lty=2)
seq.x1=seq(0,1,by=0.1)
seq.y1=seq.x1^2
polygon(c(1,0,seq.x1,1), c(0,0,seq.y1,0),col="red")
title(sub=paste("Área= ??"))
#savePlot("area_x2.jpeg", type="jpeg")
```

Cálculo da Área

```
#############################
#### Aproximação da Área ###
##########################
n.seq1=length(seq.x1)
plot(seq.x,seq.y, type="l", bty="l", cex.lab=1.5, cex.axis=1.2, main=
"Altura Mínima",xlab="x", ylab="y")
abline(v=0, lty=2)
abline(h=0, lty=2)
abline(v=1, lty=2)
barplot(height=seq.y1[-n.seq1],width=0.1, space=0, col="red", add=TRUE,
yaxt="n")

#################################
## calculo da área dos retângulos
#############################
h1=seq.y1[-n.seq1]
(ar1= sum(h1*0.1))
title(sub=paste("Área=",ar1))
```

Outra Solução

```
#################################
## Altura da área a esquerda
#############################
plot(seq.x,seq.y, type="l", bty="l", cex.lab=1.5, cex.axis=1.2, main=
"Altura Máxima", xlab="x", ylab="y")
abline(v=0, lty=2)
abline(h=0, lty=2)
abline(v=1, lty=2)
barplot(height=seq.y1[-1],width=0.1, space=0, col="red", add=TRUE,,
yaxt="n")
lines(seq.x,seq.y)
#################################
## calculo da área dos retângulos
#############################
h2=seq.y1[-1]
(ar2= sum(h2*0.1))
title(sub=paste("Área=",ar2))
```

Altura Média

```
#################################
## Altura da área na media
#############################
plot(seq.x,seq.y, type="l", bty="l", cex.lab=1.5, cex.axis=1.2, main=
```

```
"Altura Média", xlab="x", ylab="y")
abline(v=0, lty=2)
abline(h=0, lty=2)
abline(v=1, lty=2)
barplot(height=diff(seq.y1)/2+seq.y1[-n.seq1],width=0.1, space=0, col="red",
add=TRUE, yaxt="n")
lines(seq.x,seq.y)
##################################
## calculo da área dos retângulos
################################
h3=diff(seq.y1)/2+seq.y1[-n.seq1]
(ar3= sum(h3*0.1))
title(sub=paste("Área=",ar3))
################################
```

Diminuindo os intervalos

Agora vamos diminuir os intervalos do eixo x, a partir da árean estimada para a altura média do retângulo no intervalo. Esse processo é o mesmo que dizer que o intervalo tende a zero $\Delta x \to 0$, em outras palavras estamos buscando a somatória de limites. Podemos formular dessa forma: $$\int_a^b f(x)~dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i$$

$d_x=0.1$

```
##################################################
## DIMINUNIDO O INTERVALO (BASE) DOS RETÂNGULOS ##
##################################################
x11()
par(mfrow=c(2,2))
plot(seq.x,seq.y, type="l", bty="l", cex.lab=1.5, cex.axis=1.2, main=
"f(x)=x^2\t ; dx=0.1", xlab="x", ylab="y")
abline(v=0, lty=2)
abline(h=0, lty=2)
abline(v=1, lty=2)
barplot(height=diff(seq.y1)/2+seq.y1[-n.seq1],width=0.1, space=0, col="red",
add=TRUE, yaxt="n")
lines(seq.x,seq.y)
title(sub=paste("Área=",ar3))
```

$d_x=0.05$

```
##############
### dx=0.05 ##
##############
dx=0.05
seq.05= seq(0,1, by=dx)
seq.05y=seq.05^2
```

```
plot(seq.x,seq.y, type="l", bty="l", cex.lab=1.5, cex.axis=1.2, main=
paste("dx=", dx), xlab="x", ylab="y")
abline(v=0, lty=2)
abline(h=0, lty=2)
abline(v=1, lty=2)
barplot(height=diff(seq.05y)/2+seq.05y[-length(seq.05y)],width=dx, space=0,
col="red", add=TRUE, yaxt="n")
lines(seq.x,seq.y)
################################
## calculo da área dos retângulos
################################
h4=diff(seq.05y)/2+seq.05y[-length(seq.05y)]
(ar4= sum(h4*dx))
title(sub=paste("Área=",ar4))
```

$d_x=0.01$

```
##############
### dx=0.01 ##
##############
dx=0.01
seq.01= seq(0,1, by=dx)
seq.01y=seq.01^2
plot(seq.x,seq.y, type="l", bty="l", cex.lab=1.5, cex.axis=1.2, main=
paste("dx=", dx), xlab="x", ylab="y")
abline(v=0, lty=2)
abline(h=0, lty=2)
abline(v=1, lty=2)
barplot(height=diff(seq.01y)/2+seq.01y[-length(seq.01y)],width=dx, space=0,
col="red", add=TRUE, yaxt="n")
lines(seq.x,seq.y)
################################
## calculo da área dos retângulos
################################
h5=diff(seq.01y)/2+seq.01y[-length(seq.01y)]
(ar5= sum(h5*dx))
title(sub=paste("Área=",ar5))
```

$d_x=0.001$

```
##############
### dx=0.001 ##
##############
dx=0.001
seq.001= seq(0,1, by=dx)
seq.001y=seq.001^2
plot(seq.x,seq.y, type="l", bty="l", cex.lab=1.5, cex.axis=1.2, main=
paste("dx=", dx), xlab="x", ylab="y")
```

```
abline(v=0, lty=2)
abline(h=0, lty=2)
abline(v=1, lty=2)
barplot(height=diff(seq.001y)/2+seq.001y[-length(seq.001y)],width=dx,
space=0, col="red", add=TRUE, yaxt="n")
lines(seq.x,seq.y)
################################
## calculo da área dos retângulos
################################
h6=diff(seq.001y)/2+seq.001y[-length(seq.001y)]
(ar6= sum(h6*dx))
title(sub=paste("Área=",ar6))
```

Maxima

Vamos integrar algumas equações no Maxima. Abra o arquivo integral.wxm e aplique a integral nas funções apresentadas no roteiro.

maxima, integral
174)

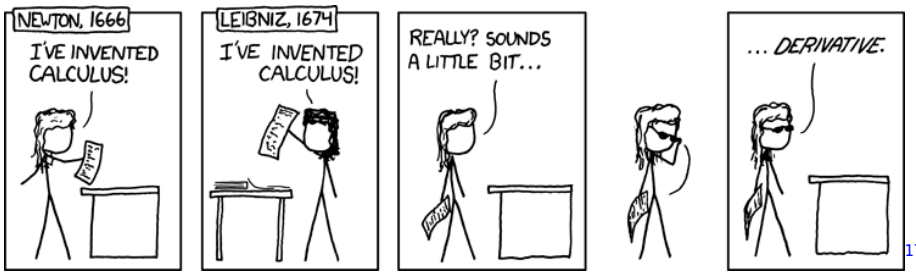
Cuidado com o Martelo de Maslow: “... se o único instrumento que tem é um martelo, todos o problemas parecem pregos!”

- IP[y]:
- R

- IP(y):
- R

Matemática e Estatística

Cálculo integral e diferencial



175)

O cálculo foi criado para descrever em linguagem matemática como uma quantidade muda ao longo do tempo. É uma ferramenta extremamente útil e poderosa para construir modelos de **dinâmicas**. Por isso o cálculo é usado há mais de um século para entender o comportamento de sistemas ecológicos.

A seguir roteiros para auxiliar a compreensão de conceitos básicos de cálculo que usamos em muitos modelos matemáticos na ecologia.

Taxas de crescimento, derivadas e função exponencial
: Aqui você descobre que a função exponencial é o limite de um crescimento discreto a uma taxa constante, quando fazemos os intervalos de tempo muito pequenos. Para isso, passaremos pelo conceito de derivadas e a noção de limite de uma função.

- Taxas de crescimento, derivadas e função exponencial

Antiderivadas e integral definida
: Conheça a integral, operação inversa da derivada. Aprenda a difereça entre integrais definidas e indefinidas.

- Antiderivadas e integral definida

Introdução a equações diferenciais
: Uma equação diferencial é uma relação entre a derivada de uma função e alguma outra função matemática. Entenda como essas equações podem ser propostas e resolvidas.

- Introdução a equações diferenciais

Integração numérica de equações diferenciais
: Tutoriais para resolver equações diferenciais com ajuda de programas de computador. A integração numeŕica computacional é a ferramenta básica para modelagem matemática em biologia.

- Integração numérica de equações diferenciais

Análise de Estabilidade

Uma dinâmica ecológica tende a um estado de equilíbrio? Este equilíbrio resiste a perturbações? Veja como responder a essas perguntas com a ajuda do cálculo.

- Análise de estabilidade

Introdução a processos estocásticos

Uma dinâmica estocástica acontece quando temos mais de um estado possível para um sistema, e podemos *pular* para cada um com uma certa probabilidade. Por isso, mesmo sistemas que começam iguais podem diferir com o passar do tempo. Por exemplo, populações sob dinâmica estocástica podem ter diferentes tamanhos a cada momento, cada um com uma probabilidade de acontecer. Nesse caso, o tamanho da população é uma variável aleatória.

Considerar a estocasticidade é muito importante para entender as dinâmicas ecológicas. Com os modelos estocásticos houve avanços teóricos importantes, como a teoria neutra da biodiversidade. Os modelos estocásticos também deixaram mais evidente o risco de extinção em populações pequenas ou sob grande variação ambiental.

Caminhadas aleatórias

As Cadeias de Markov são usadas para descrever dinâmicas ecológicas. São modelos de processos estocásticos em que o tempo é discreto, e a cada intervalo o sistema pode mudar de estado, com uma certa probabilidade. As probabilidades de mudança de um estado para outro dependem apenas do estado presente [176)].

A seguir roteiros de casos simples de Cadeias de Markov.

Caminhada aleatória em uma dimensão

Veja porque um bêbado caminhando vai se dar mal, mesmo que em média ande em linha reta.

- Roteiro Caminhada aleatória em uma dimensão

Dinâmica de soma zero

Em um jogo de soma zero só se ganha o que outros perderam. Descubra as propriedades dessa dinâmica se ganhos e perdas ocorrem ao acaso.

- Roteiro Dinâmica de soma zero

175)

Não entendeu? veja aqui.

176)

Portanto podem ser expressas em matrizes de transição do tempo t ao tempo t+1, como no exercício de modelos matriciais

Índice

Roteiros

- Colonização Interna
- Efeito Resgate

Duas Espécies

- Coexistência em Metapopulações
- Destruição de Habitat

Comunidades

- Introdução

Estrutura

- Comunidade Virtual
- Classificação por agrupamento
- Ordenação
- Partição univariada
- Partição multivariada

Dinâmica e Distúrbio

- Diversidade e Estabilidade
- Distúrbio e Coexistência
- Demandas Conflitantes
- Sucessão Ecológica
- Nicho de Regeneração

Dinâmicas Neutras

- Biogeoografia de Ilhas
- Teoria Neutra da Biodiversidade

Matemática e Estatística

- Introdução

Cálculo Integral e Diferencial

- Taxas de crescimento, derivadas e função exponencial
- Antiderivadas e integral definida
- Introdução a equações diferenciais
- Integração numérica de equações diferenciais
- Análise de estabilidade

Processos Estocásticos

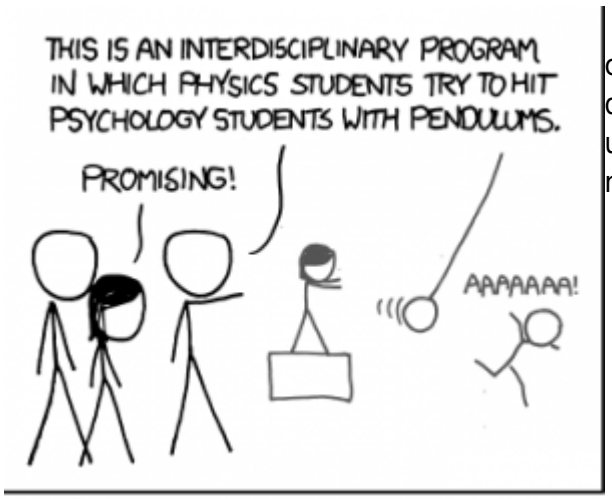
- Caminhada aleatória em uma dimensão
- Dinâmica de soma zero

Links Externos

Visitantes

- Em Sage (Gráficos online)
- Em R
- In R, english

Stability in dynamical systems - A tutorial in R



In ecology equilibrium and stability are very important concepts, but ecologists have defined them in many different ways. One of the definitions most commonly used was brought from the branch of physics and mathematics called analysis of dynamical systems.

It is this approach that brought to ecology the differential equations used to describe the dynamics of populations, such as logistic and the Lotka-Volterra system.

There are techniques to assess whether these systems of equations have stationary points, and if they are stable. Robert May (1972) used these tools to prove something surprising: the stability in food webs decreases with the increase of species and webcomplexity.

This exercise is an informal demonstration of the stability analysis of equations that represent dynamical systems, and a simplified version of the procedure used by Robert May. The goal is that you understand the concepts of equilibrium and stability in dynamical systems, which will enable you to distinguish them from other definitions of balance and stability used in ecology. With this you will also be able to critically evaluate the results of May (1972).

R setup

This exercise is ran in R (R Core Team 2011), but you don't need to know the R language, because we'll provide you R codes with the commands ready to run. The codes are in the light-blue boxes in this page, and also in a script file, below in this section. The only thing you need to know is how to send commands written in this file to R. For this you can copy the commands in this page and paste them on the R command line. But it is more straightforward to use the script file. To do this:

1. Install R in your computer, with additional packages deSolve and rootSolve. The R site has installation instructions.
2. Create a directory on your computer for this exercise.
3. Copy to this directory the following files:
    1. eq_funcoes.r

   2. eq_comandos.r
4. Run R from this directory.
5. Open the script file `eq_comandos.r`. For Windows and Mac the R basic installation includes a simple front-end, that allows you to open script files, and send the commands to R. Search the main menu for something like “File > Open Script File”. Alternatively, or if you are a Linux user, you can use your favorite IDE or Code editor.
6. Load the required R functions and packages with the commands:

```
library (deSolve)
library (rootSolve)
source ("eq_funcoes.r")
```

That's it! The commands in the script file are in the same order of this page. Run the tutorial by sending the commands to the R command line.

Single population model

Let's start with the stability analysis of the well-known logistic equation of population growth:

$$V \ = \ rN \ (\frac{1-N}{K})$$

Where V is the velocity, or rate, of population growth [177)], r is the intrinsic rate of population growth, and K the carrying capacity.

With the provided function `plota.logist` you can plot the population dynamics described by the logistic model:

```
plota.logist (n = 2, r = 0.1, K = 50, time = 200)
```

The arguments of this function in R allows you to change the parameters of the logistic function:

- n: initial population size
- `r`: the intrinsic growth rate
- K: carrying capacity
- `time`: end of the time interval to run the dynamic

To understand the effects of each parameter on this dynamical system, you can try changing the parameter values and run the function again.

Technical details

To do this tutorial you need not know how the functions used here to simulate population dynamics work. But if you are curious, in a nutshell these functions use numeric integration routines to calculate the population sizes at small time intervals, and then add these small quantities to get population sizes predicted by the model at each interval.

In R, the package simecol provides a very amenable wrapper to these computational routines, for simulations of ecological systems.

Stationary point in the logistic

Can a dynamic system reach equilibrium and will it remain there? This is the basic question of stability analysis. But first we have to define equilibrium for differential equations of population dynamics, also known as a stationary state:

> An equilibrium, or stationary state, is a population size at which the growth rate is zero, that is, where
>
> $$ \frac{dN}{dt} \ = \ 0 $$

There are two population sizes that satisfy this condition for the logistic equation:

- $ N \ = \ K $
- $ N \ = \ 0 $

These stationary points make biological sense: the population is not growing when it reaches the carrying capacity or, trivially, when it has no individuals.

Check out that these two population sizes are in equilibrium with the commands:

```
## Logistic starting at N = K
plota.logist (n = 50, r = 0.1, K = 50, time = 200)

## Logistic starting at N = 0
plota.logist (n = 0, r = 0.1, K = 50, time = 200)
```

Stability in the logistic equation

Are these stationary points stable? We'll use R to check this, but first we have to define stability:

> A stationary point is stable if the population returns to it after a small perturbation.

A small disturbance is a slight increase or decrease in population size. Hence, we are interested in **local stability**, since it is defined only for small perturbations. This definition and the forthcoming analyses does not evaluate **global stability**, a much more complicated issue.

Our R function to plot the logistic has two arguments to allow disturbances:

- `perturb`: value of the disturbance
- `t.perturb`: when the disturbance occurs

Use these arguments to add one individual to a population at the carrying capacity and to a population with no individuals:

```
## Disturbing when N = K
plota.logist (n = 50, r = 0.1, K = 50, time = 200, perturb = 1, t.perturb =
```

```
100)
## The same with the population starting at n = 2
plota.logist (n = 2, r = 0.1, K = 50, time = 200, perturb = 1, t.perturb =
100)

## Disturbing when N = 0
plota.logist (n = 0, r = 0.1, K = 50, time = 50, perturb = 1, t.perturb =
10)
```

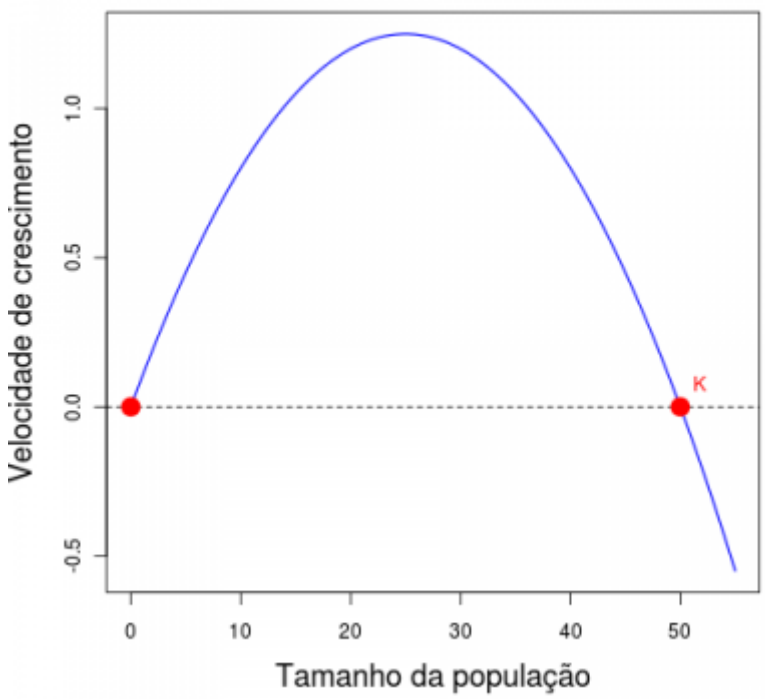
Questions

- Are these points stable?
- What is the biological interpretation?

Mathematical Interpretation

The stability criterion used here evaluates the behavior of the population growth rate when the population size varies slightly around a stationary point. We can state the conditions for stability using simple mathematical concepts. To do this, let's take a look at the relationship between the growth rate and population size in the logistic equation.

Take a look at the figure below: the growth rate, or growth speed, is a quadratic function of population size, tracing a parabola. The red points are the stationary population sizes, where the growth rate is zero [178)].



When the population is small it increases and the growth rate increases. The population growth is accelerated by population size.

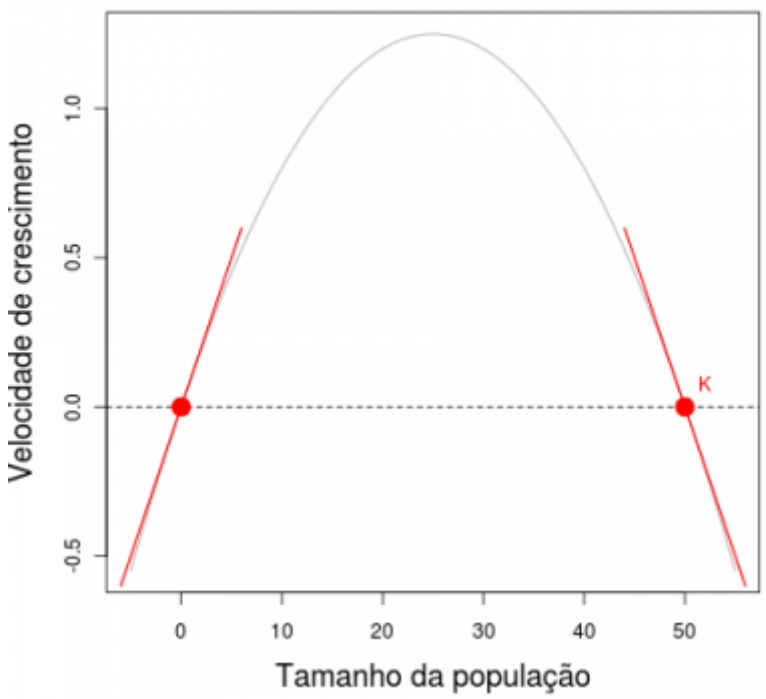
But above a certain population size the increase in population size decreases the growth speed. This is the inflection point of the logistic curve, and from this point on the increase in population size slows [179)] its growth.

This is the well-known behavior of the logistic growth: it is similar to exponential growth when the population is small, and slows down as the population approaches the carrying capacity. So in this model the growth speed has a positive relationship with population size near the stable point $N = 0$. Therefore, a small increase above zero increases the growth rate, which increases the population size, which further increases the growth rate, and so on. This is an unstable stationary point, because a small perturbation drives the population away from it.

The opposite happens at the point $K = N$, where the growth velocity has a negative relationship with population size. If we reduce the population size a little below K, it will grow, but such growth will slow growth until the growth rate is zero. If we increase the population above the carrying capacity, the growth rate is negative [180)], and thus population size decreases until it reaches K, because the negative growth rate also slows down as population size approaches the carrying capacity. Thus, disturbances in the vicinity of carrying capacity are drawn back to this stationary point.

In short, what defines stability around an equilibrium point is the sign of the relationship between growth rate and population size. This corresponds to the sign of the derivative of velocity with respect to population size at these points.

In a plot of a function, derivatives at a given point can be depicted as the slope of a line tangent to the graph of the function at this point, Below it is the same parabola of the previous figure, now with tangents to the stationary points. As you would expect, the slope of the line is positive at the point $N = 0$ and negative point $N= K $.



Now we can state a general criterion of stability for a population in mathematical terms:

A population size at a stationary point is stable if the derivative of the growth rate with respect to population size at this point is negative.

In mathematical notation this criterion is:

$$ \frac{dV}{dN} \ | {\hat N} \ <\ 0 $$

which stands for “the derivative of V in relation to N at point $ \hat N$ is less than zero.”

Two populations

How to generalize the stability criteria for multiple interacting populations?

To answer this we will use the system of equations of Lotka-Volterra for competition:

$$V_1 \ = \ r_1 N_1 (\frac{K_1 - N_1 - alpha N_2}{K_1})$$

$$V_2 \ = \ r_2 N_2 (\frac{K_2 - N_2 - beta N_1}{K_2})$$

Where, to species 1 and 2:

- V_1, $V_2 $ are the rates of population growth;
- r_1, $r_2 $ are the intrinsic growth rates;
- K_1, $K_2 $ are the carrying capacities;
- α, β are the competition coefficients, that express the effect of each species on the other.

Use the function `plots.LV` to plot the abundances of two competing species that coexist [181)]. The arguments are similar to those of the function `plota.logist`:

```
plots.LV (n = c (n1=1, n2 = 1), r1 = 0.2, K1 = 150,
          r2 = 0.2, K2 = 100, alpha = 0.2, beta = 0.1,
          time = 150)
```

Stable points with coexistence

In this system of equations the stable points are (Gotelli 2007):

$$\hat N_1 \ = \frac {K_1-\alpha K_2} {1 - \alpha \beta}$$

$$\hat N_2 \ = \frac {-K_2 \beta K_1} {1 - \alpha \beta}$$

Function `lv.neq` calculates these values, given the parameter values. You can use it to check the stationary points of the previous plot.

```
(lv.n1 <- lv.neq (r1 = 0.2, K1 = 150, r2 = 0.2, K2 = 100,
```

```
                    alpha = 0.2, beta = 0.1))
```

Stability

There are two conditions for the coexistence of competitors in the Lotka-Volterra system with two species:

$$ \frac{1}{beta} \ > \ \frac{K_1}{K_2} \ > \ \alpha $$

$$ \frac{1}{beta} \ < \ \frac{K_1}{K_2} \ < \ \alpha $$

Let's evaluate the stability of the equilibrium population sizes under these two conditions. The function `plots.LV` also has arguments to change the population size at any time.

We have already calculated the stationary population sizes for the first condition. This values were kept in a object called `lv.n1`. To evaluate the stability at this point just use this object as the argument that defines the initial population size (n). In doing so, the dynamics will start from the stationary point. To add a perturbation, use the argument `perturb` to add or subtract a small quantity from each population.

The following command subtracts one individual from population 1 and adds one individual to population 2, at time 50:

```
## Disturbing at the stationary point
## Graphic
plots.LV (n = lv.n1, r1 = 0.2, K1 = 150, r2 = 0.2, K2 = 100, alpha = 0.2,
beta = 0.1, time = 150, c = perturb (-1.1), t.perturb = 50)
```

Try the same for a combination of parameters that fulfill the second condition of coexistence:

```
## Coexistence of two species, 1/beta> K1/K2> alpha ##
## Calculation of population sizes □□at the stationary point
(lv.n2 <- lv.neq (r1 = 0.2, K1 = 150, r2 = 0.2, K2 = 100, alpha = 1.8, beta
= 0.9))
## Plot
plots.LV (n = lv.n2, r1 = 0.2, K1 = 150, r2 = 0.2, K2 = 100, alpha = 1.8,
beta = 0.9, time = 150)

## Disturbing at the stationary point
plots.LV (n = lv.n2, r1 = 0.2, K1 = 150, r2 = 0.2, K2 = 100, alpha = 1.8,
beta = 0.9, time = 200, perturb= c(-1,1), t.perturb = 50)
```

What happens if you reverse the disturbance?

```
## Reverse disturbance
plots.LV (n = lv.n2, r1 = 0.2, K1 = 150, r2 = 0.2, K2 = 100, alpha = 1.8,
beta = 0.9, time = 200, perturb= c(1, -1), t.perturb = 50)
```

Mathematical Interpretation

The analysis of stability of this two-species system follows the same logic used for the single-species model. A stationary point will be stable if the growth rate (or growth speed) at the point's vicinity has a negative relationship with population size. But now we have two coupled equations, and growth rates of each species depend on the population sizes of the two species.

Partial derivatives

One way to solve the problem is to evaluate the effect of each population on each growth rate, keeping the other population at a fixed size. This is done with partial derivatives, which are represented with the symbol $ \partial$.

For instance:

$$ {\partial V_1} / {\partial N_1} $$

is the derivative of the growth rate $V1$ of population 1 relative to its size N_1, but with population 2 constant. This derivative expresses the effect that species 1 has on its own population growth. The effect of species 1 on the growth rate of species 2 is

$$ {\partial V_2} / {\partial N_1} $$

The jacobian matrix

And now the trick is to assemble these partial derivatives in a matrix, which summarizes partial effects of each species on itself and on the competitor:

$$ {\partial V_1} / {\partial N_1} \ \ \ \ {\partial V_1} / {\partial N_2} $$

$$ {\partial V_2} / {\partial N_1} \ \ \ \ {\partial V_2} / {\partial N_2} $$

This is the **Jacobian matrix** of the system of differential equations. The diagonal of this matrix has the effect of the populations of each species on themselves. Outside the diagonal we have the inter-specific effects.

The Community matrix

In the study of stability of the logistic equation we evaluated the sign of the derivative ${dV}/{dN}$ at the stationary points. Here we have to do the same for each partial derivative. Thus we have the matrix of partial derivatives evaluated at a stationary point. In ecology, the Jacobian of a Lotka-Volterra system evaluated at the stationary points is known as the **community matrix** (May 1972).

Stability criterion

We know that the equilibrium is stable if the relationship between population size and speed in their

vicinity is negative. But how to evaluate it now? The generalization of the criterion of local stability for a system of Lotka-Volterra equations is the following:

> For a system of Lotka-Volterra equations, a stationary state is stable if the real parts of all eigenvalues of the community matrix are negative.

Eigenvalues are a property of matrices, and a basic concept in linear algebra. They have many applications and implications, but here it is enough to stick to a very informal and intuitive notion:

In our case the eigenvalues express the dominant vectors of the inter and intra-especific effects in the community matrix.

Eigenvalues can have real and imaginary parts. By now, we'll need only the real parts, so do not worry about the other part, if imaginary numbers scare you [182)]. The number of eigenvalues of a matrix of communities is equal to the number of species. The calculation of eigenvalues without a computer is laborious, but there are many computer numeric routines to do the job. In R, we can use the function eigen.

Calculations in R

Let's calculate the matrix of communities for the first combination of parameters that we had tried above, with the function `jacob.lv`. To do this input the parameter values, and the function returns the population sizes at equilibrium and the Jacobian matrix evaluated at these points:

```
## First combination of parameters: 1/beta <K1/K2 <alpha
## Community matrix
j1 <- jacob.lv (r1 = 0.2, K1 = 150, r2 = 0.2, K2 = 100, alpha = 0.2, beta =
0.1)
```

Now we apply the function `eigen` to get the eigenvalues of this matrix:

```
## Eigenvalues
eigen (j1, only.values = TRUE)$values
```

Now repeat the calculations, using the second combination of parameters we tried:

```
## Second combination of parameters: 1/beta> K1/K2> alpha
## Community Matrix
j2 <- jacob.lv (r1 = 0.2, K1 = 150, r2 = 0.2, K2 = 100, alpha = 1.8, beta =
0.9)
## Eigenvalues
eigen (j2, only.values = TRUE) $ values
```

Question: The results are consistent with what you have observed disturbing the system?

The adventures of Baron May

The community matrix can be extended to as many species as we want. Robert May (1972) did this to assess whether species diversity increases stability. If so, large stable community matrices would be easier to assemble at random than small ones.

To test this hypothesis, May outlined the following simulation:

1. Set the number of species in the system, S
2. Define the fraction of potential interactions that occur. This is the connectance of the community matrix C
3. Create a matrix with S rows by S columns
4. Fill the diagonal of this matrix with the value -1
5. Fill the remaining cells with random values until the desired connectance is reached
6. Check if the eigenvalues of this matrix are all negative. If so, count this system as stable.

This algorithm generate a system in which intraspecific competition is equal for all species, and there is a fixed proportion of interspecific associations, distributed at random, and with random magnitudes. The sign of these interactions is also drawn at random. May drew inter-specific effects from a normal distribution with zero mean, which makes positive and negative interactions equally likely. In this case, there is another important parameter of the simulation, which is the standard deviation of normal distribution from which the effects are drawn. Larger standard deviations increases the average strength effect. May called this parameter **the interaction strength** of the random community matrix.

Simulating

The provided function `may` run the original May's simulation, and has the arguments:

- S: number of species
- C: connectance
- `f`: average strength of interactions
- `nsim`: number of repetitions of the simulation

The function returns the proportion of simulations that produced stable systems [183)].

Let's start with 20 species, connectance of 0.3 [184)] and interaction strength of 0.2:

```
(sim.1 <- may (S = 20, C = 0.3, f = 0.2, nsim = 100))
```

The above command saves the results as a table. Proceed increasing the number of species, but keeping the other parameters constant:

```
(sim.1 <- rbind (sim.1, may (S = 40, C = 0.3, f = 0.2, nsim = 100)))
(sim.1 <- rbind (sim.1, may (S = 60, C = 0.3, f = 0.2, nsim = 100)))
(sim.1 <- rbind (sim.1, may (S = 80, C = 0.3, f = 0.2, nsim = 100)))
(sim.1 <- rbind (sim.1, may (S = 90, C = 0.3, f = 0.2, nsim = 100)))
(sim.1 <- rbind (sim.1, may (S = 100, C = 0.3, f = 0.2, nsim = 100)))
(sim.1 <- rbind (sim.1, may (S = 110, C = 0.3, f = 0.2, nsim = 100)))
```

```
(sim.1 <- rbind (sim.1, may (S = 120, C = 0.3, f = 0.2, nsim = 100)))
```

Can you perceive a pattern? A plot may help:

```
## Plot
plot (p.estab ~ S , data = sim.1, xlab = "N species", ylab = "Proportion of
stable matrices")
```

The connectance can be interpreted as a measure of system complexity. Does greater complexity increases the probability of a system being stable? You can test this with:

```
## Fixed species number and intercation strength, increased connectance ##
(sim.2 <- may (S = 120, C = 0.3, f = 0.2))
(sim.2 <- rbind (sim.2, may (S = 120, C = 0.28, f = 0.2)))
(sim.2 <- rbind (sim.2, may (S = 120, C = 0.26, f = 0.2)))
(sim.2 <- rbind (sim.2, may (S = 120, C = 0.24, f = 0.2)))
(sim.2 <- rbind (sim.2, may (S = 120, C = 0.22, f = 0.2)))
(sim.2 <- rbind (sim.2, may (S = 120, C = 0.20, f = 0.2)))
(sim.2 <- rbind (sim.2, may (S = 120, C = 0.18, f = 0.2)))
(sim.2 <- rbind (sim.2, may (S = 120, C = 0.16, f = 0.2)))
## Plot
plot (p.estab ~ C, data = sim.2, Xlab = "connectance", ylab = "Proportion of
stable matrices")
```

Question

Does diversity and complexity lead to stability?

References

- **Gotelli, N. 2007. A primer of ecology. Sinauer** , 3rd Ed. (A basic reference on dynamic models for ecologists).
- **May, RM 1972. Will a large complex system be stable? Nature, 238, 413-414.** (The classical paper which established the concept of stability of food webs as a porperty of a system of generalized Lotka-Volterra equations.)
- **May, RM 2001. Stability and complexity in model ecosystems. Princeton, Princeton University Press.** (In this influential monograph May develops the ideas of his 1972 paper. The book was issued in 1973, and due its importance to theoretical ecology was reprinted in the collection Princeton Landmarks of Biology in 2001.)
- **Sarah P. Otto & Troy Day 2007. A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution. Princeton, Princeton University Press.** (Good introduction to mathematical modelling, writen by biologists to biologists. As in this exercise, has a less traditional and more intuitive approach. A great book for those who do not know linear algebra and want to better understand the details of stability analysis and matrix algebra we use here. see also the companion site.)

- R Development Core Team (2011). R: A language and environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL

http://www.R-project.org/.

R, cálculo, derivada, equação diferencial, lotka-volterra, crescimento logístico

177)

the same as dN/dt

178)

They are the roots of the quadratic equation.

179)

in the terminology of physics, it is negative acceleration

180)

make sure you saw this in the figure

181)

in this case the parameter values were chosen to result in stable coexistence of the two competitors

182)

imaginary numbers are not that scary, anyway. In stability analysis they are also important, because they carry information about oscillations in the system

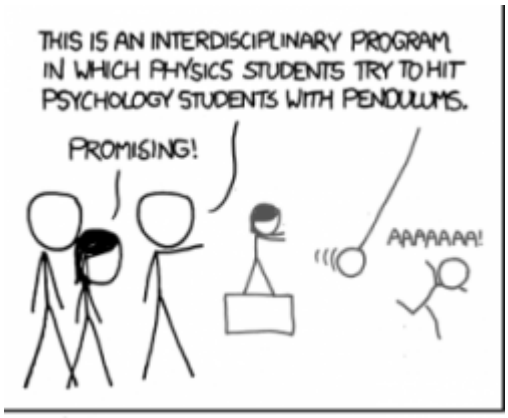
183)

that is, community matrices with all eigenvalues with negative real parts

184)

30% of the cells of the community matrix has non-zero elements

Estabilidade em sistemas dinâmicos - Roteiro em R



Equilíbrio e estabilidade são conceitos muito importantes em ecologia, mas que comportam muitas definições. Uma das definições mais usadas foi trazida do ramo da física e da matemática chamada de análise de sistemas dinâmicos.

É esta abordagem que trouxe para a ecologia equações para descrever a dinâmica de populações, como a equação logística e o sistema de equações de Lotka-Volterra.

Há técnicas para avaliar se estes sistemas de equações têm pontos de equilíbrio, e se este equilíbrio é estável. Este exercício é uma demonstração informal da análise de estabilidade de equações que representam sistemas dinâmicos. O objetivo é que você compreenda os conceitos de equilíbrio e estabilidade usadas em sistemas dinâmicos, para diferenciá-los de outras definições de equilíbrio e estabilidade usadas na ecologia.

Preparação: ambiente R

Este exercício é feito em R (R Core Team 2012), mas você não precisa conhecer a linguagem R, porque damos os comandos já prontos para executar. Eles estão reproduzidos nesta página, e também em um arquivo, abaixo. A única coisa que você precisa saber é como enviar os comandos escritos neste arquivo para o R. Para isso você pode copiar os comandos desta página e colar na linha de comando do R. Mas é bem mais prático usar o arquivo de comandos, ou *script*. Para isso, siga os seguintes passos:

1. Instale em seu computador o ambiente R, com os pacotes adicionais `deSolve` e `rootSolve`. A página do R tem instruções de instalação. Veja também nosso roteiro de instalação do R.
2. Crie um diretório em seu computador para os exercícios.
3. Copie para este diretório os arquivos abaixo:
    1. eq_funcoes.r
    2. eq_comandos.r

4. Abra o R a partir do arquivo de comandos `eq_comandos.r`. Certifique-se de que você está no diretório onde estão os arquivos.
5. Os comandos neste arquivo estão na mesma ordem deste exercício. Siga o roteiro, enviando os comandos indicados a cada seção.
6. Se você não sabe como enviar os comandos do arquivo faça este tutorial.
7. Carregue no R os pacotes e funções que vamos usar neste exercício com os comandos:

```
library(deSolve)
library(rootSolve)
source("eq_funcoes.r")
```

Uma população

Vamos começar com a análise de estabilidade da conhecida equação logística de crescimento populacional:

$$V \ = \ rN\ \left(1-\frac{N}{K} \right)$$

Onde V é a velocidade de crescimento da população [185)], r é a taxa intrínseca de crescimento populacional, e K a capacidade de suporte.

Com o R podemos fazer o gráfico do crescimento logístico para qualquer valor dos parâmetros com a função `plota.logist`:

```
plota.logist(n=2,r=0.1,K=50,time=200)
```

Os argumentos desta função em R permitem alterar os parâmetros da equação:

- n : tamamanho inicial da população
- `r` : taxa intrínseca de crescimento
- K : capacidade de suporte
- `time` : tempo máximo

Experimente alterar os parâmetros e veja o resultado.

Equilíbrio na logística

A pergunta básica da análise de estabilidade em sistemas dinâmicos é se há pontos de equilíbrio estáveis. Primeiro temos que definir equilíbrio:

O tamanho populacional em equilíbrio é aquele em que velocidade de crescimento é nula, ou seja em que

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

Há dois tamanhos populacionais que satisfazem esta condição para a equação logística:

- $N \ = \ K$
- $N \ = \ 0$

Estes tamanhos em equilíbrio fazem sentido biológico: a população não cresce quando chega à capacidade de suporte ou, trivialmente, quando está vazia.

Verifique que estes dois tamanhos populacionais estão em equilíbrio com os comandos:

```
## Logistica iniciando em N=K
plota.logist(n=50,r=0.1,K=50,time=200)

## Logistica iniciando em N=0
plota.logist(n=0,r=0.1,K=50,time=200)
```

Estabilidade da logística

Algum destes pontos de equilíbrio são estáveis? Vamos experimentar com o R, mas antes precisamos definir de que estabilidade estamos falando:

Um tamanho populacional em equilíbrio é **localmente estável** se a população retorna a ele após uma pequena perturbação.

Uma pequena perturbação é um pequeno acréscimo ou redução do tamanho populacional. Nossa função para plotar a logística tem mais dois argumentos para incluir perturbações:

- `perturb` : valor da perturbação
- `t.perturb` : momento da perturbação

Acrescente um indivíduo[186)] à populações que estejam com tamanhos iguais a zero e K:

```
## Perturbando quando N=K
plota.logist(n=50,r=0.1,K=50,time=200, perturb=1, t.perturb=100)
## O mesmo com a populacao iniciando em n= 2
plota.logist(n=2,r=0.1,K=50,time=200, perturb=1, t.perturb=100)

## Perturbando em N=0
plota.logist(n=0,r=0.1,K=50,time=50, perturb=1, t.perturb=10)
```

Perguntas

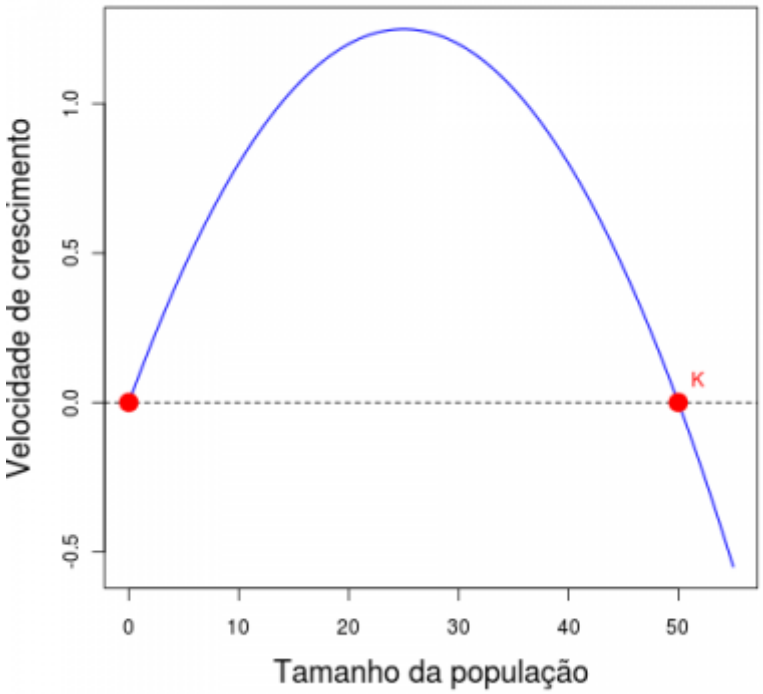
- Estes pontos são estáveis?
- Qual a interpretação biológica?

Interpretação matemática

O critério de estabilidade que usamos avalia o comportamento da velocidade de crescimento, quando o tamanho populacional varia **um pouco** em torno do equilíbrio. Como é a relação entre velocidade

de crescimento e tamanho populacional na equação logística?

Veja a figura abaixo: a velocidade tem uma relação quadrática com o tamanho populacional, formando uma parábola. Os pontos de equilíbrio, em que a velocidade de crescimento é zero, estão marcados em vermelho [187)].



Quando a população é pequena, seu crescimento faz a velocidade de crescimento aumentar, ou seja, o tamanho populacional acelera seu crescimento.

A partir de um certo tamanho populacional, chamado ponto de inflexão da curva, o aumento na população faz a velocidade diminuir. Deste ponto em diante o tamanho populacional freia [188)] o seu crescimento.

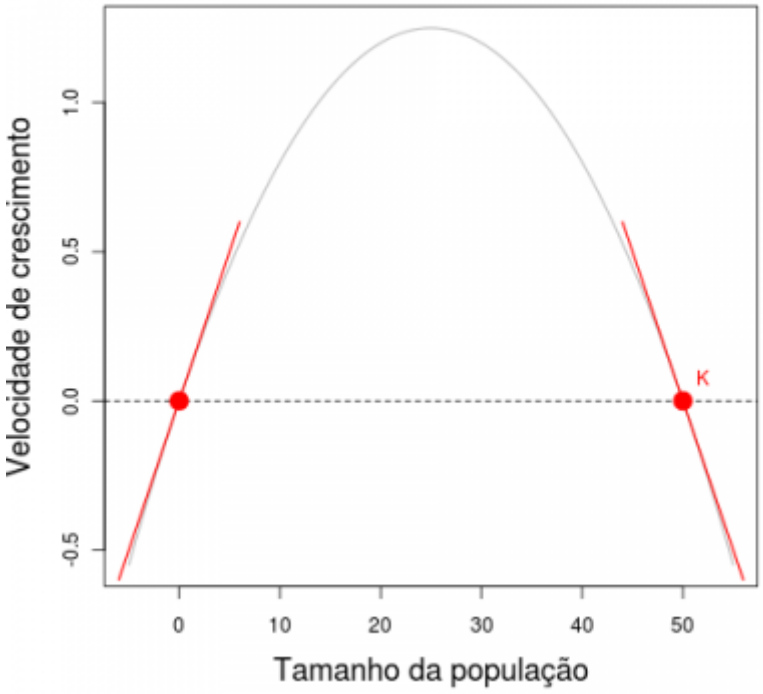
Isso é a própria expressão da equação logística: crescimento próximo do exponencial quando a população é pequena, e redução da velocidade até a parada, quando a população chega à capacidade de suporte. Logo, a velocidade tem uma relação positiva com o tamanho populacional **próximo** ao equilíbrio $N=0$. Portanto, um **pequeno** aumento acima de zero aumenta a velocidade de crescimento, que aumenta o tamanho populacional, que aumenta ainda mais a velocidade de crescimento. Este é um equilíbrio instável: basta uma pequena perturbação para afastar a população dele.

No ponto $N=K$ acontece o oposto: a velocidade tem uma relação negativa com o tamanho populacional. Se diminuímos a população **um pouco** abaixo de K, ela crescerá, mas este crescimento reduzirá a velocidade de crescimento até que a velocidade seja nula. Se aumentamos a população **um pouco** acima da capacidade de suporte, a velocidade será negativa [189)], e a população reduzirá até chegar a K, pois a velocidade negativa também desacelera. Assim, perturbações **na vizinhança** da capacidade de suporte são atraídas de volta para este ponto.

Em resumo, o que define a estabilidade **em torno** de um ponto de equilíbrio é o sinal da relação entre a velocidade de crescimento e o tamanho populacional **nesta vizinhança**. Isto corresponde ao

sinal da inclinação de uma reta tangente ao ponto de equilíbrio, que é a derivada da velocidade em relação ao tamanho populacional, **nestes pontos**.

Abaixo está a mesma parábola da figura anterior, agora com retas tangentes aos pontos de equilíbrio. A inclinação da reta é positiva **no ponto** $N=0$ e negativa **no ponto** $N=K$.



Com isso chegamos a um critério de estabilidade **local** para uma população com crescimento em tempo contínuo:

Um tamanho populacional em equilíbrio é **localmente estável** se a derivada da velocidade de crescimento em relação ao tamanho populacional neste ponto for negativa.

Em notação matemática este critério é:

$$\frac{dV}{dN} \bigg|_{\hat N} \ < \ 0$$

o que se lê “a derivada de V em relação a N no ponto $\hat N$ é menor que zero”.

Por que tantas palavras em negrito?

Para lembrar que que todo este raciocínio é válido apenas na **vizinhança** de um ponto.

A derivada pode ser vista como uma reta que aproxima uma função em um ponto. Na vizinhança deste ponto esta aproximação linear funciona, e podemos avaliar o comportamento da função pela inclinação da reta

tangente (isto é, pelo sinal da derivada no ponto).

Por isso o nome completo do que apresentamos neste tutorial é **análise de estabilidade local por aproximação linear**.

Ela avalia a resposta de sistemas de equações diferenciais após pequenas perturbações na vizinhança de seus pontos de equilíbrio. Isso é feito sob a premissa de que nessa vizinhança as funções de velocidade são bem aproximadas por suas derivadas.

Esta análise não informa sobre o resultado de grandes perturbações, e também pode falhar para sistemas com comportamentos fortemente não-lineares.

Para saber mais

- **Gotelli, N. 2007. Ecologia. Londrina, Ed. Planta.** (A referência básica sobre os modelos dinâmicos em ecologia).
- **May, R.M. 1972. Will a large complex system be stable? Nature, 238, 413-414.** (O artigo clássico que estabeleceu o conceito de equilíbrio de redes tróficas como solução de um sistema de equações de Lotka-Volterra.)
- **May, R.M. 2001. Stability and complexity in model ecosystems. Princeton, Princeton University Press.** (Nesta influente monografia Robert May desenvolve as idéias do artigo de 1972. A primeira edição é de 1973, e o livro foi re-editado na coleção Princeton Landmarks of Biology em 2001.)
- **Sarah P. Otto & Troy Day 2007. A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution. Princeton, Princeton University Press.** (Ótima introdução à matemática, de biólogos para biólogos. Como neste exercício, muita vezes usa abordagens menos tradicionais e mais intuitivas. Uma ótima fonte para quem quiser entender melhor os detalhes das análises de estabilidade e algebra matricial que usamos aqui. Veja também o site do livro.)
- Roteiro sobre diversidade e estabilidade, onde a análise é generalizada para um sistemas com mais de uma espécie.
- R Development Core Team (2012). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org/.

R, cálculo, derivada, equação diferencial, lotka-volterra, crescimento logístico

185)

o mesmo que dN/dt

186)

rigorosamente isto não seria uma perturbação tão pequena assim, mas funciona com este sistema

187)

Eles são as raízes da equação quadrática.

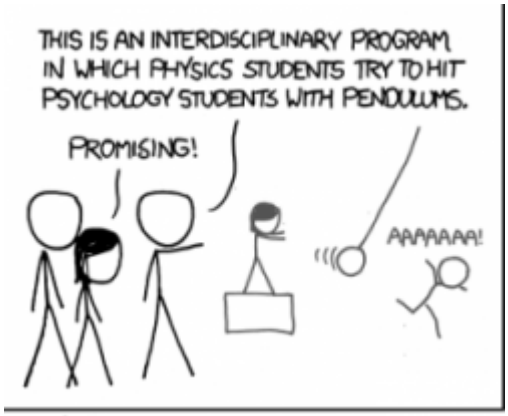
188)

na terminologia de física, isso é aceleração negativa

189)

certifique-se que viu isto na figura

Estabilidade em sistemas dinâmicos - Roteiro interativo



Equilíbrio e estabilidade são conceitos muito importantes em ecologia, mas que comportam muitas definições. Uma das definições mais usadas foi trazida do ramo da física e da matemática chamada de análise de sistemas dinâmicos.

É esta abordagem que trouxe para a ecologia equações para descrever a dinâmica de populações, como a equação logística e o sistema de equações de Lotka-Volterra.

Há técnicas para avaliar se estes sistemas de equações têm pontos de equilíbrio, e se este equilíbrio é estável. Este exercício é uma demonstração informal da análise de estabilidade de uma equação que representa um sistema dinâmico. O objetivo é que você compreenda os conceitos de equilíbrio e estabilidade usadas em sistemas dinâmicos, para diferenciá-los de outras definições de equilíbrio e estabilidade usadas na ecologia.

O modelo logístico

Vamos fazer a análise de estabilidade da conhecida equação logística de crescimento populacional:

$$V \ = \ rN\ \left(1-\frac{N}{K} \right)$$

Onde V é a velocidade de crescimento da população [190)], r é a taxa intrínseca de crescimento populacional, e K a capacidade de suporte.

Clique no botão `Evaluate` abaixo para abrir um gráfico interativo do modelo logístico. Experimente alterar os parâmetros do modelo e analise como cada um afeta a dinâmica populacional [191)].

Equilíbrio na logística

A pergunta básica da análise de estabilidade em sistemas dinâmicos é se há **pontos de equilíbrio** estáveis. No caso da logística, estes pontos de equilíbrio são tamanhos populacionais. Mas primeiro vamos definir equilíbrio:

> O tamanho populacional em equilíbrio é aquele em que a velocidade de crescimento é nula, ou seja em que
>
> $$\frac{dN}{dt} = 0$$

Há dois tamanhos populacionais que satisfazem esta condição para a equação logística:

- $N \ = \ K$
- $N \ = \ 0$

Estes tamanhos em equilíbrio fazem sentido biológico: a população não cresce quando chega à capacidade de suporte ou, trivialmente, quando está vazia.

Verifique que estes dois tamanhos populacionais estão em equilíbrio no gráfico interativo da seção anterior. Para isso, é só fazer o tamanho inicial da população (argumento `N0`) igual aos tamanhos em equilíbrio.

Estabilidade da logística

Algum destes pontos de equilíbrio são estáveis? Vamos experimentar com um novo gráfico, mas antes precisamos definir de que estabilidade estamos falando:

> Um tamanho populacional em equilíbrio é **localmente estável** se a população retorna a ele após uma pequena perturbação.

Uma pequena perturbação é um pequeno acréscimo ou redução do tamanho populacional. Clique no botão `Evaluate` abaixo para plotar a logística com dois argumentos para incluir perturbações:

- `Disturb` : valor da perturbação
- `Disturb time` : momento da perturbação

Aumente em meio ou um o tamanho das populações que estejam com tamanhos iguais a zero e K [192)].

- http://ecovirtual.ib.usp.br/

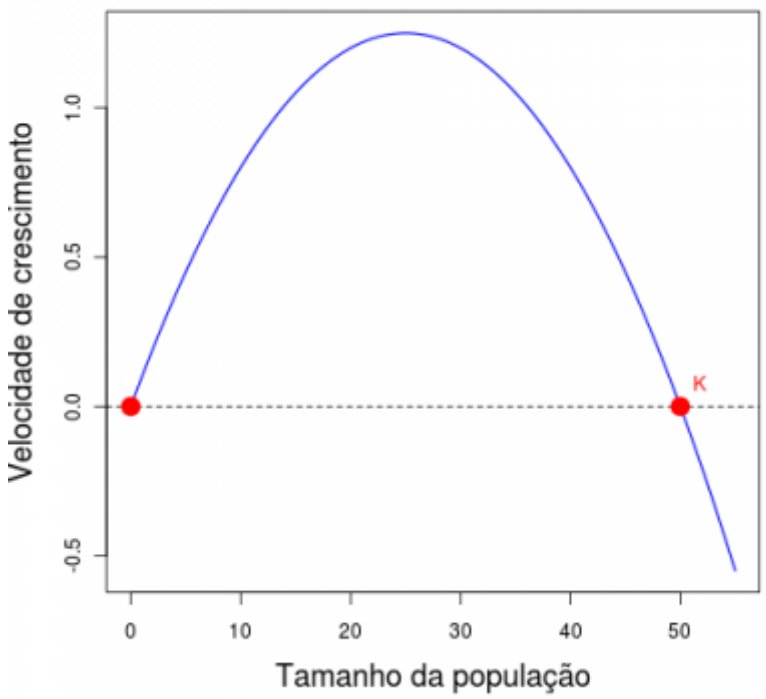
Perguntas

- Há pontos estáveis?
- Qual a interpretação biológica?

Interpretação matemática

O critério de estabilidade que usamos avalia o comportamento da velocidade de crescimento, quando o tamanho populacional varia **um pouco** em torno do equilíbrio. Como é a relação entre velocidade de crescimento e tamanho populacional na equação logística?

Veja a figura abaixo: a velocidade tem uma relação quadrática com o tamanho populacional, formando uma parábola. Os pontos de equilíbrio, em que a velocidade de crescimento é zero, estão marcados em vermelho [193)].



Quando a população é pequena, seu crescimento faz a velocidade de crescimento aumentar, ou seja, o tamanho populacional acelera seu crescimento.

A partir de um certo tamanho populacional, chamado ponto de inflexão da curva, o aumento na população faz a velocidade diminuir. Deste ponto em diante o tamanho populacional freia [194)] o seu crescimento.

Isso é a própria expressão da equação logística: crescimento próximo do exponencial quando a população é pequena, e redução da velocidade até a parada, quando a população chega à capacidade de suporte. Logo, a velocidade tem uma relação positiva com o tamanho populacional **próximo** ao equilíbrio $N=0$. Portanto, um **pequeno** aumento acima de zero aumenta a velocidade de crescimento, que aumenta o tamanho populacional, que aumenta ainda mais a velocidade de

crescimento. Este é um equilíbrio instável: basta uma pequena perturbação para afastar a população dele.

No ponto $N=K$ acontece o oposto: a velocidade tem uma relação negativa com o tamanho populacional. Se diminuímos a população **um pouco** abaixo de K, ela crescerá, mas este crescimento reduzirá a velocidade de crescimento até que a velocidade seja nula. Se aumentamos a população **um pouco** acima da capacidade de suporte, a velocidade será negativa [195)], e a população reduzirá até chegar a K, pois a velocidade negativa também desacelera. Assim, perturbações **na vizinhança** da capacidade de suporte são atraídas de volta para este ponto.

Em resumo, o que define a estabilidade **em torno** de um ponto de equilíbrio é o sinal da relação entre a velocidade de crescimento e o tamanho populacional **nesta vizinhança**. Isto é aproximado pelo sinal da inclinação de uma reta tangente ao ponto de equilíbrio, que é a derivada da velocidade em relação ao tamanho populacional, **nestes pontos**.

Abaixo está um botão para criar o gráfico interativo da mesma parábola da figura anterior, agora com uma tangente a um ponto da função, que você escolhe com o argumento `Evaluation point`. Verifique que a inclinação da reta é positiva **no ponto** $N=0$ e negativa **no ponto** $N=K$.

Com isso chegamos a um critério de estabilidade **local** para uma população com crescimento em tempo contínuo:

> Um tamanho populacional em equilíbrio é **localmente estável** se a derivada da velocidade de crescimento em relação ao tamanho populacional neste ponto for negativa.

Em notação matemática este critério é:

$$\frac{dV}{dN} \bigg|_{N^*} \ < \ 0$$

o que se lê “a derivada de V em relação a N no ponto N^* é menor que zero”.

CODA

<u>Por que tantas palavras em negrito?</u>

Para lembrar que que todo este raciocínio é válido apenas na **vizinhança** de um ponto.

A derivada pode ser vista como a inclinação de uma reta que aproxima uma função em um ponto. Na vizinhança desse ponto essa aproximação linear em geral funciona, e podemos avaliar o comportamento da função pelo sinal da derivada no ponto.

Por isso o nome completo do que apresentamos neste tutorial é **análise de**

estabilidade local por aproximação linear.

Ela avalia a resposta de sistemas de equações diferenciais após pequenas perturbações na vizinhança de seus pontos de equilíbrio. Isso é feito sob a premissa de que nessa vizinhança as funções de velocidade são bem aproximadas por suas derivadas.

Essa análise não informa sobre o resultado de grandes perturbações, e também pode falhar para sistemas com comportamentos fortemente não-lineares.

Para saber mais

- **Gotelli, N. 2007. Ecologia. Londrina, Ed. Planta.** (A referência básica sobre os modelos dinâmicos em ecologia).
- **Sarah P. Otto & Troy Day 2007. A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution. Princeton, Princeton University Press.** (Ótima introdução à matemática, de biólogos para biólogos. Como neste exercício, muita vezes usa abordagens menos tradicionais e mais intuitivas. Uma ótima fonte para quem quiser entender melhor os detalhes das análises de estabilidade e algebra matricial que usamos aqui. Veja também o site do livro.)
- Conheça uma variante da logística com três pontos de equilíbrio no roteiro sobre efeito Allee.
- Robert May usou o critério de estabilidade local para propor que a diversidade diminui as chances de estabilidade. Veja neste roteiro.
- R Development Core Team (2012). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org/.

R, cálculo, derivada, equação diferencial, lotka-volterra, crescimento logístico

190) o mesmo que dN/dt

191) Se estiver curioso(a) para saber como a mágica funciona: o código está no ambiente Sage notebook, e é executado remotamente no servidor Sage Cell Server.

192) rigorosamente isso não seria uma perturbação tão pequena assim, mas funciona com este sistema

193) Eles são as raízes da equação quadrática.

194) na terminologia de física, isso é aceleração negativa

195) certifique-se que viu isto na figura

Dinâmica de soma zero

O conceito de de soma zero vem da teoria dos jogos, e descreve a divisão de uma quantia fixa entre participantes, de modo que só se ganha o que outros perdem.

Se os ganhos e consequentes perdas acontecem com uma certa probabilidade, o jogo torna-se uma dinâmica estocástica, como na teoria neutra da biodiversidade. Seu criador, Stephen Hubbell, assumiu que as comunidades estão saturadas, de modo que um novo indivíduo só se estabelece se outro morre. A sucessão ao acaso de mortes, nascimentos e chegada de migrantes criaria então uma dinâmica de soma zero, que explicaria vários padrões das comunidades.

Neste tutorial, simulamos uma dinâmica estocástica de soma zero muito simples com o **EcoVirtual**. Depois disso, você pode estudar a aplicação desse modelo no roteiro sobre teoria neutra da biodiversidade.

Um joguinho besta

Vamos imaginar um jogo de apostas entre dois jogadores, sem empates. A cada rodada o perdedor da aposta paga uma quantia fixa ao ganhador. Os dois jogadores têm a mesma probabilidade de ganhar a cada rodada. Esse é um jogo de soma zero, pois o valor total em jogo não se altera. O que muda é apenas a fração deste total em poder de cada jogador. Note que a propriedade de soma zero é possível mesmo que os jogadores tenham chances diferentes de vencer, ou que a quantia que o perdedor paga também seja sorteada.

Em nossa simulação, o jogo só termina quando acaba, ou seja, quando um dos dois jogadores perde todo o dinheiro[196)].

Parametros

Nessa função há três argumentos para a simulação:

Opção	Parâmetro	O que faz
`Total amount`	total	o valor total de dinheiro em jogo No início este total é dividido igualmente entre os jogadores
`Bet size`	bet	o valor pago pelo perdedor a cada aposta
`Maximum game time`	tmax	tempo máximo da simulação jogo em minutos

O argumento `tmax` não faz parte da regra do jogo. É apenas uma precaução contra simulações muito demoradas. Fixe-o em 10, mas as simulações devem terminar bem antes disso na maioria dos computadores.

O que afeta o tempo de jogo?

A simulação transcorre até o final do jogo, ou até o tempo máximo se esgotar. Varie o total em jogo e o valor da aposta e avalie seu efeito na duração do jogo. Sugestões de valores:

- total = 20, bet = 1
- total = 20, bet = 2
- total = 40, bet = 1
- total = 40, bet = 2

Em dinâmicas estocásticas o resultado varia a cada vez, mesmo que os parâmetros sejam os mesmos. Por isso repita cada simulação algumas vezes para assegurar-se dos resultados.

Perguntas

1. Qual o efeito do aumento do total em jogo e do tamanho da aposta sobre o tempo para que o jogo acabe?
2. Este jogo também é um processo de caminhada aleatória em uma dimensão. Explique porque.

196)

ou quando você quiser parar o jogo, se achar que está demorando muito

Dinâmica de soma zero - Roteiro no R

O conceito de de soma zero vem da teoria dos jogos, e descreve a divisão de uma quantia fixa entre participantes, de modo que só se ganha o que outros perdem.

Se os ganhos e consequentes perdas acontecem com uma certa probabilidade, o jogo torna-se uma dinâmica estocástica, como na teoria neutra da biodiversidade. Seu criador, Stephen Hubbell, assumiu que as comunidades estão saturadas, de modo que um novo indivíduo só se estabelece se outro morre. A sucessão ao acaso de mortes, nascimentos e chegada de migrantes criaria então uma dinâmica de soma zero, que explicaria vários padrões das comunidades.

Neste tutorial, simulamos uma dinâmica estocástica de soma zero muito simples com o **EcoVirtual**. Depois disso, você pode estudar a aplicação desse modelo no roteiro sobre teoria neutra da biodiversidade.

Um joguinho besta

Vamos imaginar um jogo de apostas entre dois jogadores, sem empates. A cada rodada o perdedor da aposta paga uma quantia fixa ao ganhador. Os dois jogadores têm a mesma probabilidade de ganhar a cada rodada. Esse é um jogo de soma zero, pois o valor total em jogo não se altera. O que muda é apenas a fração deste total em poder de cada jogador. Note que a propriedade de soma zero é possível mesmo que os jogadores tenham chances diferentes de vencer, ou que a quantia que o perdedor paga também seja sorteada.

Em nossa simulação, o jogo só termina quando acaba, ou seja, quando um dos dois jogadores perde todo o dinheiro[197)].

Para prosseguir você deve ter o ambiente **R** com o pacote **Ecovirtual** instalado e carregado. Se você não tem e não sabe como ter, consulte a página de Instalação.

Depois de instalar o pacote, execute o R e carregue o pacote copiando o comando abaixo para a linha de comando do R:

```
library(EcoVirtual)
```

Vamos simular esta situação com a função `extGame` do pacote **EcoVirtual**.

Nessa função há três argumentos para a simulação:

Opção	Parâmetro	O que faz
`Total amount`	total	o valor total de dinheiro em jogo No início este total é dividido igualmente entre os jogadores
`Bet size`	bet	o valor pago pelo perdedor a cada aposta
`Maximum game time`	tmax	tempo máximo da simulação jogo em minutos

O argumento `tmax` não faz parte da regra do jogo. É apenas uma precaução contra simulações muito demoradas. Fixe-o em 10, mas as simulações devem terminar bem antes disso na maioria dos computadores.

O que afeta o tempo de jogo?

A simulação transcorre até o final do jogo, ou até o tempo máximo se esgotar. Varie o total em jogo e o valor da aposta e avalie seu efeito na duração do jogo. Sugestões de valores:

- total = 20, bet = 1
- total = 20, bet = 2
- total = 40, bet = 1
- total = 40, bet = 2

Em dinâmicas estocásticas o resultado varia a cada vez, mesmo que os parâmetros sejam os mesmos. Por isso repita cada simulação algumas vezes para assegurar-se dos resultados.

Para realizar a primeira simulação proposta acima, copie o comando abaixo e cole na linha de comando do R:

```
extGame(total= 20, bet=1)
```

Para realizar as demais simulações, basta repetir o comando acima no R, alterando os valores dos argumentos `bet` e `total`.

Questões

1. Qual o efeito do aumento do total em jogo e do tamanho da aposta sobre o tempo para que o jogo acabe?
2. Este jogo também é um processo de caminhada aleatória em uma dimensão. Explique porque.

197)

ou quando você quiser parar o jogo, se achar que está demorando muito

Dinâmica de soma zero - Roteiro em R

O conceito de de soma zero vem da teoria dos jogos, e descreve a divisão de uma quantia fixa entre participantes, de modo que só se ganha o que outros perdem.

Se os ganhos e consequentes perdas acontecem com uma certa probabilidade, o jogo torna-se uma dinâmica estocástica, como na teoria neutra da biodiversidade. Seu criador, Stephen Hubbell, assumiu que as comunidades estão saturadas, de modo que um novo indivíduo só se estabelece se outro morre. A sucessão ao acaso de mortes, nascimentos e chegada de migrantes criaria então uma dinâmica de zoma zero, que explicaria vários padrões das comunidades.

Neste tutorial, simulamos uma dinâmica estocástica de soma zero muito simples no ambiente R. Depois disso, você pode estudar a aplicação desse modelo no roteiro sobre teoria neutra da biodiversidade.

Para prosseguir você deve ter o ambiente R instalado. Se você não tem e não sabe como ter, consulte a página de Instalação.

Um Joguinho Besta

Vamos imaginar um jogo de apostas entre dois jogadores, sem empates. A cada rodada o perdedor da aposta paga uma quantia fixa ao ganhador. Os dois jogadores têm a mesma probabilidade de ganhar a cada rodada. Esse é um jogo de soma zero, pois o valor total em jogo não se altera. O que muda é apenas a fração deste total em poder de cada jogador. Note que a propriedade de soma zero é possível mesmo que os jogadores tenham chances diferentes de vencer, ou que a quantia que o perdedor paga também seja sorteada.

Em nossa simulação, o jogo só termina quando acaba, ou seja, quando um dos dois jogadores perde todo o dinheiro[198]. Vamos simular esta situação com uma função em R. Copie o código da função abaixo para a linha de comando do R:

```
jogo <- function(aposta=1,total=20){
  X <- total/2
```

- http://ecovirtual.ib.usp.br/

```
  results <- X
  while(X>0&X<total){
    X <- X+sample(c(aposta,-1*aposta),1)
    results <- c(results,X)
  }
  plot(1:length(results),results, type="l", col="blue",ylim=c(0,total),
xlab="N de rodadas", ylab="Valor")
  lines(1:length(results),total-results, col="red")
  abline(h=c(0,total),lty=2)
}
```

Esta função tem apenas dois argumentos:

- `aposta`: que é o valor pago pelo perdedor a cada aposta
- `total`: o valor total de dinheiro em jogo. No início este total é dividido igualmente entre os jogadores.

A simulação transcorre até o final do jogo. Para simular um jogo com apostas de uma unidade e total em jogo de cem unidades execute o comando no R:

```
jogo(aposta=1, total=100)
```

O que afeta o tempo de jogo?

A simulação transcorre até o final do jogo, ou até o tempo máximo se esgotar. Varie o total em jogo e o valor da aposta e avalie seu efeito na duração do jogo. Sugestões de valores:

- total = 100, aposta = 1
- total = 100, aposta = 10
- total = 1000, aposta = 1
- total = 1000, aposta = 10

Em dinâmicas estocásticas o resultado varia a cada vez, mesmo que os parâmetros sejam os mesmos. Por isso repita cada simulação algumas vezes para assegurar-se dos resultados.

Perguntas

1. Qual o efeito do aumento do total em jogo e do tamanho da aposta sobre o tempo para que o jogo acabe?
2. Este jogo também é um processo de caminhada aleatória em uma dimensão. Explique porque.

198)

ou quando você quiser parar o jogo, se achar que está demorando muito

Dinâmica de soma zero - Roteiro no EcoVirtual

O conceito de de soma zero vem da teoria dos jogos, e descreve a divisão de uma quantia fixa entre participantes, de modo que só se ganha o que outros perdem.

Se os ganhos e consequentes perdas acontecem com uma certa probabilidade, o jogo torna-se uma dinâmica estocástica, como na teoria neutra da biodiversidade. Seu criador, Stephen Hubbell, assumiu que as comunidades estão saturadas, de modo que um novo indivíduo só se estabelece se outro morre. A sucessão ao acaso de mortes, nascimentos e chegada de migrantes criaria então uma dinâmica de soma zero, que explicaria vários padrões das comunidades.

Neste tutorial, simulamos uma dinâmica estocástica de soma zero muito simples com o **EcoVirtual**. Depois disso, você pode estudar a aplicação desse modelo no roteiro sobre teoria neutra da biodiversidade.

Um joguinho besta

Vamos imaginar um jogo de apostas entre dois jogadores, sem empates. A cada rodada o perdedor da aposta paga uma quantia fixa ao ganhador. Os dois jogadores têm a mesma probabilidade de ganhar a cada rodada. Esse é um jogo de soma zero, pois o valor total em jogo não se altera. O que muda é apenas a fração deste total em poder de cada jogador. Note que a propriedade de soma zero é possível mesmo que os jogadores tenham chances diferentes de vencer, ou que a quantia que o perdedor paga também seja sorteada.

Em nossa simulação, o jogo só termina quando acaba, ou seja, quando um dos dois jogadores perde todo o dinheiro[199)].

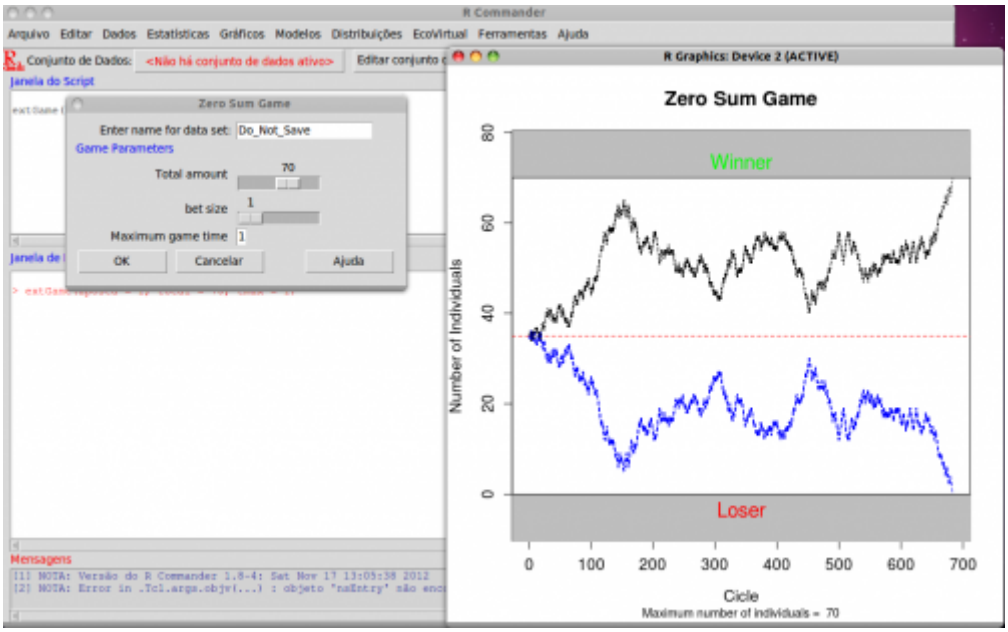
Para prosseguir você deve ter o ambiente **R** com os pacotes **Rcmdr** e **Ecovirtual** instalados e carregados. Se você não tem e não sabe como ter, consulte a página de Instalação.

Caso já tenha o R e pacotes instalados

Carregue o pacote principal ***RcmdrPlugin.EcoVirtual*** pelo menu do R **Pacotes > Carregar Pacotes**, ou pela linha de comando com o código:

```
library("RcmdrPlugin.EcoVirtual")
```

Vamos simular esta situação com a função **Zero Sum Game**. Abra o menu do **EcoVirtual** no Rcmdr: EcoVirtual>Biogeograph models> Zero Sum Game. A seguinte janela de menu se abrirá:



Nessa função há três argumentos para a simulação:

Opção	Parâmetro	O que faz
`Total amount`	total	o valor total de dinheiro em jogo No início este total é dividido igualmente entre os jogadores
`Bet size`	bet	o valor pago pelo perdedor a cada aposta
`Maximum game time`	tmax	tempo máximo da simulação jogo em minutos

O argumento `tmax` não faz parte da regra do jogo. É apenas uma precaução contra simulações muito demoradas. Fixe-o em 10, mas as simulações devem terminar bem antes disso na maioria dos computadores.

O que afeta o tempo de jogo?

A simulação transcorre até o final do jogo, ou até o tempo máximo se esgotar. Varie o total em jogo e o valor da aposta e avalie seu efeito na duração do jogo. Sugestões de valores:

- total = 20, bet = 1
- total = 20, bet = 2
- total = 40, bet = 1
- total = 40, bet = 2

Em dinâmicas estocásticas o resultado varia a cada vez, mesmo que os parâmetros sejam os mesmos. Por isso repita cada simulação algumas vezes para assegurar-se dos resultados.

Questões

1. Qual o efeito do aumento do total em jogo e do tamanho da aposta sobre o tempo para que o jogo acabe?
2. Este jogo também é um processo de caminhada aleatória em uma dimensão. Explique porque.

199)

ou quando você quiser parar o jogo, se achar que está demorando muito

Dinâmica de soma zero - Roteiro no EcoVirtual

O conceito de de soma zero vem da teoria dos jogos, e descreve a divisão de uma quantia fixa entre participantes, de modo que só se ganha o que outros perdem.

Se os ganhos e consequentes perdas acontecem com uma certa probabilidade, o jogo torna-se uma dinâmica estocástica, como na teoria neutra da biodiversidade. Seu criador, Stephen Hubbell, assumiu que as comunidades estão saturadas, de modo que um novo indivíduo só se estabelece se outro morre. A sucessão ao acaso de mortes, nascimentos e chegada de migrantes criaria então uma dinâmica de soma zero, que explicaria vários padrões das comunidades.

Neste tutorial, simulamos uma dinâmica estocástica de soma zero muito simples com o **EcoVirtual**. Depois disso, você pode estudar a aplicação desse modelo no roteiro sobre teoria neutra da biodiversidade.

Para prosseguir você deve ter o ambiente R com os pacotes Rcmdr e Ecovirtual instalados e carregados. Se você não tem e não sabe como ter, consulte a página de Instalação.

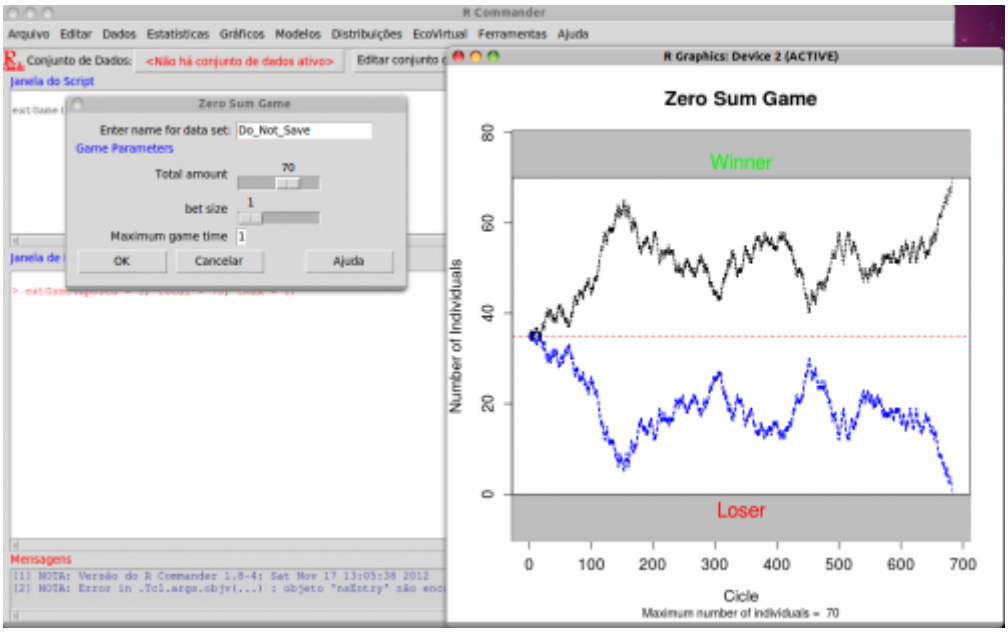
Um joguinho besta

Vamos imaginar um jogo de apostas entre dois jogadores, sem empates. A cada rodada o perdedor da aposta paga uma quantia fixa ao ganhador. Os dois jogadores têm a mesma probabilidade de ganhar a cada rodada. Esse é um jogo de soma zero, pois o valor total em jogo não se altera. O que muda é apenas a fração deste total em poder de cada jogador. Note que a propriedade de soma zero é possível mesmo que os jogadores tenham chances diferentes de vencer, ou que a quantia que o perdedor paga também seja sorteada.

Em nossa simulação, o jogo só termina quando acaba, ou seja, quando um dos dois jogadores perde todo o dinheiro[200]. Vamos simular esta situação com a função **Zero Sum Game**. Abra o menu do **EcoVirtual** no Rcmdr: EcoVirtual>Biogeograph models> Zero Sum Game. A seguinte janela de menu

- http://ecovirtual.ib.usp.br/

se abrirá:



Nessa janela há três argumentos para a simulação:

Opção	O que faz
`Total amount`	o valor total de dinheiro em jogo No início este total é dividido igualmente entre os jogadores
`Bet size`	o valor pago pelo perdedor a cada aposta
`Maximum game time`	tempo máximo da simulação jogo em minutos

O argumento `Maximum game time` não faz parte da regra do jogo. É apenas uma precaução contra simulações muito demoradas. Fixe-o em 10 minutos, mas as simulações devem terminar bem antes disso na maioria dos computadores.

O que afeta o tempo de jogo?

A simulação transcorre até o final do jogo, ou até o tempo máximo se esgotar. Varie o total em jogo e o valor da aposta e avalie seu efeito na duração do jogo. Sugestões de valores:

- `Total amount` = 20, `bet size` = 1
- `Total amount` = 20, `bet size` = 5
- `Total amount` = 100, `bet size` = 1
- `Total amount` = 100, `bet size` = 5

Em dinâmicas estocásticas o resultado varia a cada vez, mesmo que os parâmetros sejam os mesmos. Por isso repita cada simulação algumas vezes para assegurar-se dos resultados.

Perguntas

1. Qual o efeito do aumento do total em jogo e do tamanho da aposta sobre o tempo para que o jogo acabe?
2. Este jogo também é um processo de caminhada aleatória em uma dimensão. Explique porque.

200)

ou quando você quiser parar o jogo, se achar que está demorando muito