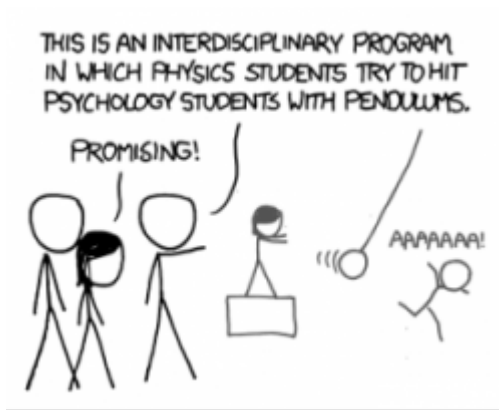




Estabilidade em sistemas dinâmicos - Roteiro interativo



Equilíbrio e estabilidade são conceitos muito importantes em ecologia, mas que comportam muitas definições. Uma das definições mais usadas foi trazida do ramo da física e da matemática chamada de análise de [sistemas dinâmicos](#).

É esta abordagem que trouxe para a ecologia equações para descrever a dinâmica de populações, como a [equação logística](#) e o sistema de [equações de Lotka-Volterra](#).

Há técnicas para avaliar se estes sistemas de equações têm pontos de equilíbrio, e se este equilíbrio é estável. Este exercício é uma demonstração informal da análise de estabilidade de uma equação que representa um sistema dinâmico. O objetivo é que você compreenda os conceitos de equilíbrio e estabilidade usadas em sistemas dinâmicos, para diferenciá-los de outras definições de equilíbrio e estabilidade usadas na ecologia.

O modelo logístico

Vamos fazer a análise de estabilidade da conhecida equação logística de crescimento populacional:

$$V = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

Onde V é a velocidade de crescimento da população ¹⁾, r é a taxa intrínseca de crescimento populacional, e K a capacidade de suporte.

Clique no botão [Evalue](#) abaixo para abrir um gráfico interativo do modelo logístico. Experimente alterar os parâmetros do modelo e analise como cada um afeta a dinâmica populacional ²⁾.

Equilíbrio na logística

A pergunta básica da análise de estabilidade em sistemas dinâmicos é se há **pontos de equilíbrio** estáveis. No caso da logística, estes pontos de equilíbrio são tamanhos populacionais. Mas primeiro vamos definir equilíbrio:

O tamanho populacional em equilíbrio é aquele em que a velocidade de crescimento é nula, ou seja em que

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

Há dois tamanhos populacionais que satisfazem esta condição para a equação logística:

- $N = K$
- $N = 0$

Estes tamanhos em equilíbrio fazem sentido biológico: a população não cresce quando chega à capacidade de suporte ou, trivialmente, quando está vazia.

Verifique que estes dois tamanhos populacionais estão em equilíbrio no gráfico interativo da seção anterior. Para isso, é só fazer o tamanho inicial da população (argumento N_0) igual aos tamanhos em equilíbrio.

Estabilidade da logística

Alguns destes pontos de equilíbrio são estáveis? Vamos experimentar com um novo gráfico, mas antes precisamos definir de que estabilidade estamos falando:

Um tamanho populacional em equilíbrio é **localmente estável** se a população retorna a ele após uma pequena perturbação.

Uma pequena perturbação é um pequeno acréscimo ou redução do tamanho populacional. Clique no botão **Evaluate** abaixo para plotar a logística com dois argumentos para incluir perturbações:

- **Disturb** : valor da perturbação
- **Disturb time** : momento da perturbação

Aumente em meio ou um o tamanho das populações que estejam com tamanhos iguais a zero e K

³⁾

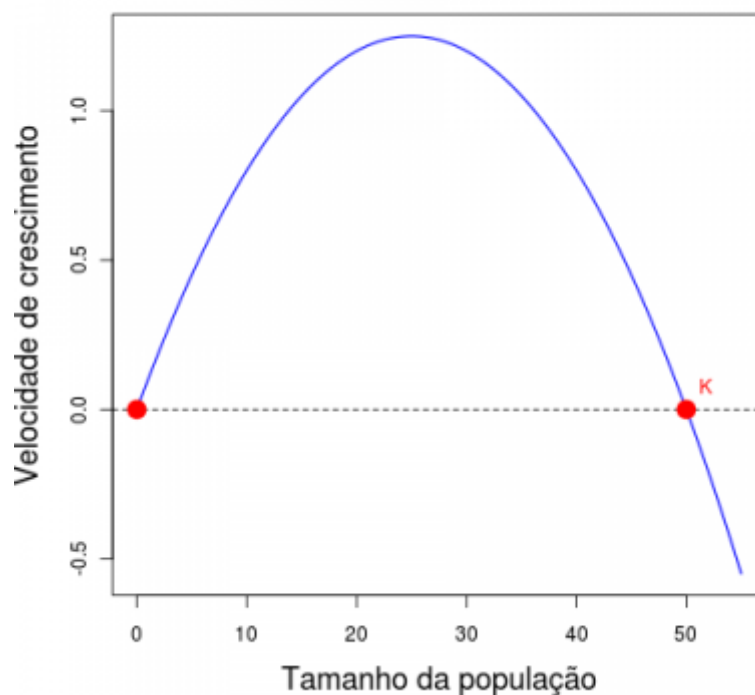
Perguntas

- Há pontos estáveis?
- Qual a interpretação biológica?

Interpretação matemática

O critério de estabilidade que usamos avalia o comportamento da velocidade de crescimento, quando o tamanho populacional varia **um pouco** em torno do equilíbrio. Como é a relação entre velocidade de crescimento e tamanho populacional na equação logística?

Veja a figura abaixo: a velocidade tem uma relação quadrática com o tamanho populacional, formando uma parábola. Os pontos de equilíbrio, em que a velocidade de crescimento é zero, estão marcados em vermelho ⁴⁾.



Quando a população é pequena, seu crescimento faz a velocidade de crescimento aumentar, ou seja, o tamanho populacional acelera seu crescimento.

A partir de um certo tamanho populacional, chamado ponto de inflexão da curva, o aumento na população faz a velocidade diminuir. Deste ponto em diante o tamanho populacional freia ⁵⁾ o seu crescimento.

Isso é a própria expressão da equação logística: crescimento próximo do exponencial quando a população é pequena, e redução da velocidade até a parada, quando a população chega à capacidade de suporte. Logo, a velocidade tem uma relação positiva com o tamanho populacional **próximo** ao equilíbrio $\dot{N}=0$. Portanto, um **pequeno** aumento acima de zero aumenta a velocidade de crescimento, que aumenta o tamanho populacional, que aumenta ainda mais a velocidade de

crescimento. Este é um equilíbrio instável: basta uma pequena perturbação para afastar a população dele.

No ponto $N=K$ acontece o oposto: a velocidade tem uma relação negativa com o tamanho populacional. Se diminuirmos a população **um pouco** abaixo de K , ela crescerá, mas este crescimento reduzirá a velocidade de crescimento até que a velocidade seja nula. Se aumentamos a população **um pouco** acima da capacidade de suporte, a velocidade será negativa ⁶⁾, e a população reduzirá até chegar a K , pois a velocidade negativa também desacelera. Assim, perturbações **na vizinhança** da capacidade de suporte são atraídas de volta para este ponto.

Em resumo, o que define a estabilidade **em torno** de um ponto de equilíbrio é o sinal da relação entre a velocidade de crescimento e o tamanho populacional **nesta vizinhança**. Isto é aproximado pelo sinal da inclinação de uma reta tangente ao ponto de equilíbrio, que é a derivada da velocidade em relação ao tamanho populacional, **nestes pontos**.

Abaixo está um botão para criar o gráfico interativo da mesma parábola da figura anterior, agora com uma tangente a um ponto da função, que você escolhe com o argumento Evaluation point. Verifique que a inclinação da reta é positiva **no ponto** $N=0$ e negativa **no ponto** $N=K$.

Com isso chegamos a um critério de estabilidade **local** para uma população com crescimento em tempo contínuo:

Um tamanho populacional em equilíbrio é **localmente estável** se a derivada da velocidade de crescimento em relação ao tamanho populacional neste ponto for negativa.

Em notação matemática este critério é:

$$\left. \frac{dV}{dN} \right|_{N^*} < 0$$

o que se lê “a derivada de V em relação a N no ponto N^* é menor que zero”.

CODA

Por que tantas palavras em negrito?

Para lembrar que que todo este raciocínio é válido apenas na **vizinhança** de um ponto.



A derivada pode ser vista como a inclinação de uma reta que aproxima uma função em um ponto. Na vizinhança desse ponto essa aproximação linear em geral funciona, e podemos avaliar o comportamento da função pelo sinal da derivada no ponto.

Por isso o nome completo do que apresentamos neste tutorial é **análise de**

estabilidade local por aproximação linear.

Ela avalia a resposta de sistemas de equações diferenciais após pequenas perturbações na vizinhança de seus pontos de equilíbrio. Isso é feito sob a premissa de que nessa vizinhança as funções de velocidade são bem aproximadas por suas derivadas.



Essa análise não informa sobre o resultado de grandes perturbações, e também pode falhar para sistemas com comportamentos fortemente não-lineares.

Para saber mais

- **Gotelli, N. 2007. Ecologia. Londrina, Ed. Planta.** (A referência básica sobre os modelos dinâmicos em ecologia).
- **Sarah P. Otto & Troy Day 2007. A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution. Princeton, Princeton University Press.** (Ótima introdução à matemática, de biólogos para biólogos. Como neste exercício, muita vezes usa abordagens menos tradicionais e mais intuitivas. Uma ótima fonte para quem quiser entender melhor os detalhes das análises de estabilidade e álgebra matricial que usamos aqui. Veja também o [site do livro](#).)
- Conheça uma variante da logística com três pontos de equilíbrio no roteiro sobre [efeito Allee](#).
- Robert May usou o critério de estabilidade local para propor que a diversidade diminui as chances de estabilidade. Veja neste [roteiro](#).
- R Development Core Team (2012). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

[R](#), [cálculo](#), [derivada](#), [equação diferencial](#), [lotka-volterra](#), [crescimento logístico](#)

1)

o mesmo que dN/dt

2)

Se estiver curioso(a) para saber como a mágica funciona: o código está no ambiente [Sage notebook](#), e é executado remotamente no servidor [Sage Cell Server](#).

3)

rigorosamente isso não seria uma perturbação tão pequena assim, mas funciona com este sistema

4)

Eles são as raízes da equação quadrática.

5)

na terminologia de física, isso é aceleração negativa

6)

certifique-se que viu isto na figura

From:
<http://ecovirtual.ib.usp.br/> -

Permanent link:
<http://ecovirtual.ib.usp.br/doku.php?id=ecovirt:roteiro:math:stabilitysage>

Last update: **2017/01/17 18:36**



