



# Dinâmica populacional denso-independente - Roteiro no Ecovirtual



Uma população em que as taxas de nascimento e mortalidade são constantes tem um crescimento ou decréscimo independente da densidade dela própria. Essa situação é geralmente relacionada à ausência de restrição ao crescimento, quando os recursos são ilimitados, mas pode também estar associada à extinção de populações.

## Tempo discreto

### Taxa de crescimento

Vamos imaginar agora uma população com taxas constante de crescimento e mortalidade e sem migrações. Vamos imaginar também que essa população cresce a intervalos regulares. O tamanho da população no próximo passo de tempo ( $N_{t+1}$ ) é o número de indivíduos da geração anterior ( $N_t$ ) mais o número de nascimentos ( $B$ ), e menos o número mortes ( $D$ ) no intervalo de tempo:

$$N_{t+1} = N_t + B - D$$

O número de mortes e nascimentos são resultado de taxas *per capita* multiplicadas pelo tamanho da população:

- $B = bN_t$
- $D = dN_t$

onde:  $b$  = taxa de nascimento *per capita* a cada geração ;  $d$  = taxa de mortalidade *per capita* a cada geração. Note que a taxa não muda com o tamanho da população, e que o número de nascimentos e mortes é proporcional ao tamanho populacional. Vamos apenas deixar claro mais uma premissa, para fins didáticos: os nascimentos e mortes ocorrem simultaneamente na população, no intervalo de tempo  $t$ . Podemos então dizer que :

- $N_{t+1} = N_t + bN_t - dN_t$
- $N_{t+1} = N_t + (b-d)N_t$

se definimos um fator de crescimento discreto:  $r_d = b-d$

- $N_{t+1} = (1+r_d)N_t$
- $\frac{N_{t+1}}{N_t} = 1+r_d$

Como  $1+r_d$  é uma constante, vamos designá-la como  $\lambda$ , um número positivo que

expressa o aumento proporcional da população de uma geração a outra. Portanto:

$$\lambda = \frac{N_{t+1}}{N_t} \implies N_{t+1} = \lambda N_t$$

## Projeção da população em tempo discreto

Podemos então projetar a nossa população a cada passo de tempo  $\Delta t$ . Por exemplo:

Se uma população com 100 indivíduos tem uma taxa per capita de natalidade de 0,8/ano e de mortalidade de 0,75/ano, qual o tamanho esperado da população no próximo ano?

$$N_{t+1} = 100 \times (1 + 0,8 - 0,75) = 100 \times 1,05 = 105$$

Podemos também projetar a população para outras gerações, usando iterações:

- $N_{t+2} = 105 \times 1,05 = 110,25$
- $N_{t+3} = 110,25 \times 1,05 = 115,7625$

prossequindo e tomando o tamanho da população no tempo zero ( $N_0$ ):

- $N_{t+4} = N_0 \times \lambda \times \lambda \times \lambda \times \lambda$
- $N_{t+4} = N_0 \lambda^4$

Generalizando:

$$N_t = N_0 \lambda^t$$

Assim, para nosso exemplo a projeção para 10 intervalos de tempo é

$$100 \times \{1,05\}^{10} = 162,8895$$

## Tempo contínuo

Com um pouco de manipulação algébrica a equação para tempo discreto

$$N_{t+1} = (1 + r_d) N_t$$

Pode ser reescrita como

$$N_{t+1} - N_t = \Delta N = r_d N_t$$

o que explicita que **a velocidade de crescimento  $\Delta N = N_{t+1} - N_t$  é proporcional ao tamanho populacional  $N_t$** . Essa é característica essencial do crescimento populacional sem limites a uma taxa constante:



O fato básico da reprodução faz com que a variação do número de indivíduos de

uma população no tempo seja proporcional ao número de indivíduos, em um ambiente constante.

A velocidade de crescimento é a variação no número de indivíduos  $\Delta N$  dividida pelo tempo em que se deu esta variação,  $\Delta t$ . No modelo de tempo discreto  $\Delta t = 1$ , por definição. É um intervalo que pode ser tão grande como uma geração. Isso faz sentido se as mudanças no tamanho populacional se dão em intervalos discretos, como por exemplo em espécies **semélparas** com estação reprodutiva sincronizada.

No entanto, o tamanho populacionais da maioria das espécies varia continuamente. O **cálculo diferencial** foi criado para descrever esse tipo de dinâmica. Como o problema é que podem ocorrer mudanças a qualquer instante, o conceito-chave aqui é o de *taxa instantânea*, ou derivada.

## Taxa instantânea de crescimento

Se nascimentos e mortes podem acontecer a todo momento, faz mais sentido pensarmos em uma velocidade instantânea do tamanho populacional. Isto equivale a reduzir  $\Delta t$  tanto que pode ser considerado um instante. Esta velocidade instantânea é a *derivada* do tamanho populacional, que representamos com  $\frac{dN}{dt}$ , para diferenciar da velocidade a intervalos grandes e arbitrários  $\frac{\Delta N}{\Delta t}$  <sup>1</sup>.

Agora podemos expressar que velocidade instantânea de uma população é proporcional ao tamanho populacional com a equação:

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Que é o modelo de crescimento populacional a taxa constante em tempo contínuo. O parâmetro  $r$  é chamado *taxa instantânea de crescimento per capita*. Essa taxa  $r$  expressa o número médio de filhotes que cada indivíduo da população produz num intervalo de tempo muito curto. Por isso, muitos livros de ecologia indicam que a unidade de  $r$  é indivíduos/indivíduo.tempo. Físicos e matemáticos são mais rigorosos e lembram que a expressão correta da unidade é 1/tempo.

## Projeção da população em tempo contínuo

Para prever o tamanho de uma população que cresce a uma taxa constante em tempo contínuo usamos a equação

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

E a relação entre a taxa de crescimento instantânea e a taxa de crescimento do modelo discreto é

$$r = \ln(\lambda)$$

**Por que? Por que? Por que?**

As duas equações acima são deduzidas da equação  $\frac{dN}{dt} = rN$  com técnicas de cálculo numérico. Se quiser entender um pouco mais sobre isso veja o roteiro

sobre [taxas, derivadas e função exponencial](#).

## Simulando crescimento denso-independente

Para prosseguir você deve ter o ambiente **R** com os pacotes **Rcmdr** e **Ecovirtual** instalados e carregados. Se você não tem e não sabe como ter, consulte a página de [Instalação](#).



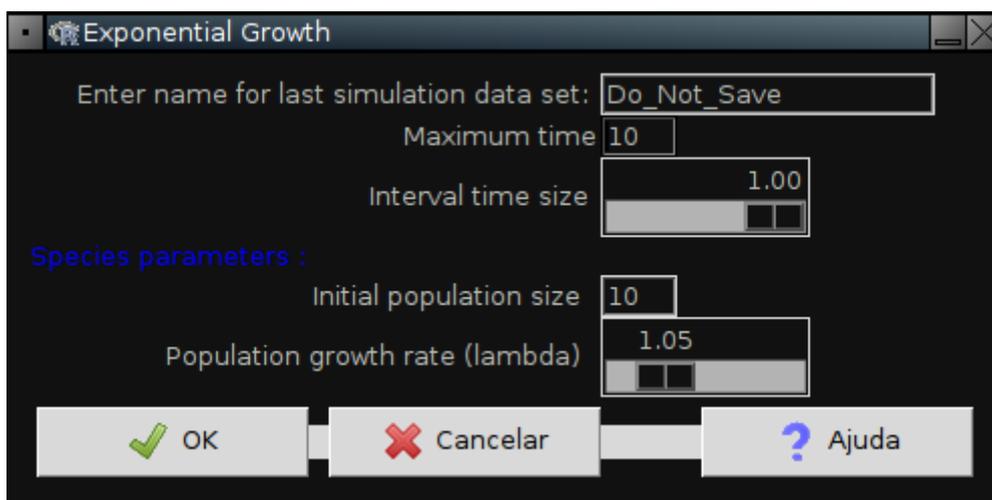
### Caso já tenha o R e pacotes instalados

Carregue o pacote principal **RcmdrPlugin.EcoVirtual** pelo menu do R **Pacotes > Carregar Pacotes**, ou pela linha de comando com o código:

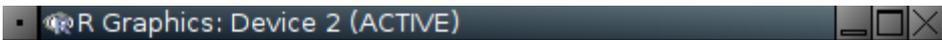
```
library("RcmdrPlugin.EcoVirtual")
```

Vamos usar o **EcoVirtual** para projetar o tamanho de populações que crescem a taxas constantes sem limite, em tempo contínuo e discreto.

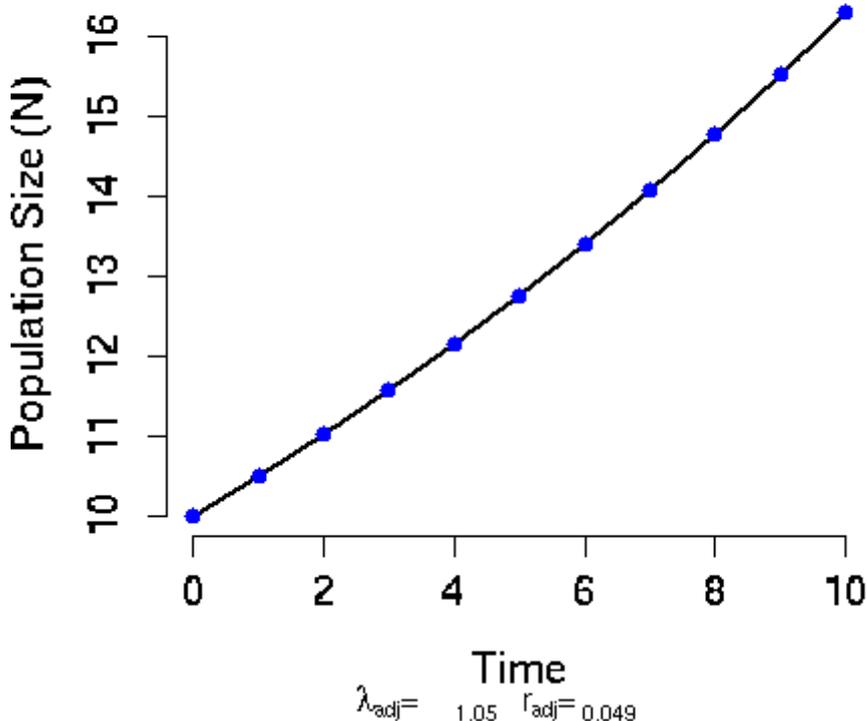
Na janela do Rcmdr clique na opção de menu *EcoVirtual*, e depois em *One population* em seguida em *Exponential growth*. Duas janelas irão se abrir, uma de opções como esta:



e outra com um gráfico como este:



### Discrete and Continuous Exponential Growth



Arranje as janelas de modo que o gráfico esteja sempre visível, mesmo quando você alterar valores na janela de opções.

#### Parâmetros

Os parâmetros da nossa função de crescimento denso-independente são:

Opção	parâmetro	definição
Enter name for last simulation data set	objeto no R	nome para salvar os resultados da simulação em um objeto no R
Maximum time	tmax	número de interações
Interval time size	intt	divisões do intervalo de tempo para o modelo discreto
Initial population size	N0	tamanho inicial da população
Population growth rate (lambda)	lambda	taxa de crescimento do modelo discreto

#### Gráfico resultante da função

O resultado da função será um gráfico com o tamanho da população em função do tempo previstos pelos modelos. Os pontos azuis indicam os tamanhos populacionais previstos pelo modelo de crescimento em tempo discreto:

$$N_t = N_0 \lambda^t$$

usando os valores de  $N_0$  e  $\lambda$  da caixa de opções. A linha preta indica os tamanhos populacionais previstos pelo modelo de crescimento em tempo contínuo:

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

usando os mesmos valores de parâmetros. Para isso, o  $\lambda$  é usado para calcular a taxa de crescimento instantânea *per capita* correspondente do modelo contínuo pela relação:

$$r = \ln(\lambda)$$

Os valores para o modelo discreto são pontos, porque este modelo prevê o tamanho da população a intervalos discretos. Já o modelo em tempo contínuo prevê o tamanho da população a qualquer momento, e por isso é representado por uma linha contínua.

Os pontos se sobrepõem à linha porque o **EcoVirtual** usa taxas de crescimento equivalentes para tornar as projeções comparáveis. Abaixo do eixo X do gráfico está o valor de  $\lambda$  e de  $r$  usados na simulação.

## Exercícios: brincando nos campos do senhor



Em suas memoráveis aulas de dinâmica de populações, o físico [Roberto Kraenkel](#) costuma dizer que não sabe se o paraíso existe, mas em caso afirmativo sabe que só lá as populações crescem sem limites. Apesar disso, prossegue, os modelos para este tipo de crescimento são essenciais para entender a dinâmica de populações reais, assim como a irrealista primeira lei de Newton é essencial para entender o movimento dos corpos no espaço.

Então vamos usar o **EcoVirtual** para explorar o comportamento dos modelos de crescimento a taxas constantes!

### Varie a taxa de crescimento

Experimente diferentes valores da taxa de crescimento discreto  $\lambda$  com a opção Population growth rate ( $\lambda$ ). Isso vai alterar também a taxa de crescimento contínuo  $r$ . Veja o efeito no gráfico e use uma calculadora para conferir a correspondência entre as duas taxas, indicadas abaixo do eixo X do gráfico.

### Pergunta

Qual valor ou intervalos de valores de  $\lambda$  e de  $r$  sob o quais a população:

1. cresce ?
2. decresce ?
3. permanece estável ?

### Varie o intervalo no modelo discreto

O parâmetro Interval time size ( $\Delta t$ ) define um novo intervalo de tempo para o modelo de tempo discreto. O novo valor de intervalo é uma fração do original de valor um. Assim, se você escolher  $0.5$  para esta opção as projeções do modelo discreto são recalculadas para intervalos que correspondem à metade do intervalo original. Por isso, você verá no gráfico pontos azuis a cada meia unidade de tempo. Alterando o intervalo para  $0.25$  você terá projeções para intervalos que são um quarto da unidade original, e o gráfico terá pontos a cada  $0,25$  unidade de tempo.

Note que à medida que você diminui o intervalo de tempo do modelo discreto os pontos se aproximam, até que parecem formar uma linha contínua. Ou seja, a projeção a intervalos discretos tende à projeção em tempo contínuo à medida que os intervalos são reduzidos!

De fato, o modelo exponencial pode ser visto como um limite do modelo discreto. Os detalhes estão no já indicado roteiro [taxas, derivadas e função exponencial](#). Mas para que isso funcione o **EcoVirtual** recalcula o valor de  $\lambda$  e o correspondente  $r$  para cada novo intervalo de tempo discreto. E aqui vai nossa pergunta: como são feitos estes cálculos? Mais precisamente:

### Pergunta

Dado uma razão de crescimento discreto para um intervalo de tempo de valor de uma unidade,  $\lambda_1 = \frac{N_{t+1}}{N_t}$

como calcular a razão de crescimento para um intervalo fracionário

$$\lambda_{1/n} = \frac{N_{t+1/n}}{N_t}$$

de modo que ao final de uma unidade de tempo a razão de crescimento permaneça  $\lambda_1$ ? Verifique sua solução contra os valores que o **EcoVirtual** retorna quando você reduz o intervalo de

tempo discreto pela metade (intt=0.5).

#### duas dicas



1. Uma solução passa por lembrar que o  $\lambda$  não tem unidade de tempo, pois é uma razão entre dois tamanhos populacionais. Portanto ele não pode ser reescalado diretamente para a nova unidade de tempo. Já o  $r$  tem escala de tempo: uma taxa de  $r=1$  indivíduo/indivíduo.semana equivale a  $r=1/7$  indivíduo/indivíduo.dia.
2. Outra maneira de pensar no problema é lembrar que o crescimento discreto em uma unidade original de tempo à taxa unitária é de  $\lambda_1$  e na taxa fracionária é de  $\lambda_{1/n}^n$ . A solução do problema é fazer essas duas quantidades iguais.

## Exercícios extra: Cresce BRASIL

Esse exercício utiliza os dados de censos do IBGE para modelar e fazer previsões sobre o crescimento da população brasileira. Antes de continuar, baixe os arquivos de dados necessários:

1. [censo90.csv](#)
2. [censodecadas.csv](#)} }preservefilenames:autofilled:censodecadas.csv

Os modelos que iremos utilizar nesse exercício são:

- modelo crescimento denso-independente discreto:

$$N_t = N_0 \lambda^t$$

- modelo crescimento denso-independente contínuo:

$$N_t = N_0 e^{rt}$$

E a transformação entre eles:

$$r = \ln(\lambda) \quad \lambda = e^r$$

## Dados dos censos demográficos década: 1990-2000

Abra o arquivo [censo90.csv](#) em uma planilha eletrônica.

## Variáveis

Os dados estão estratificados por gênero (Homens, Mulheres) e por local de residência (Urbano ou Rural). Para esse exercício só utilizaremos os dados de Homens e Mulheres (colunas 2 e 3) somados e representando o tamanho total da população. O primeiro passo é, portanto, calcular esse valor em uma nova coluna da tabela.

## Atividades

Para a população total, calcule:

- as taxas de crescimentos entre os censos;
- as taxas de crescimento anual entre censos;
- a taxa de crescimento anual considerando o intervalo 1991-2000;
- o tamanho populacional esperado para o ano de 2010, a partir da taxa anual entre censos 1991-2000.

Compare sua estimativa com o tamanho populacional observado no censo IBGE 2010 abaixo:

**População no censo 2010: 169872856**

Discuta com os colegas da bancada (trios) as possíveis fontes da diferença entre a estimativa do modelo e os dados do censo 2010, baseado nos pressupostos que estruturam o modelo. Anotem as explicações que o grupo julga plausíveis.

## Série de dados temporais

Vamos agora usar os dados de uma série temporal mais longa e ver como as taxas de crescimento anual estão se comportando ao longo do tempo.

Abra o arquivo [censodecadas.csv](#) em uma planilha eletrônica. Os dados estão estruturados da mesma maneira, de forma que também será necessário calcular a população total somando homens e mulheres.

## Atividades

- Calcule as taxas de crescimento para cada intervalo de censo;
- Calcule as taxas anuais instantâneas para cada intervalo;
- Faça um gráfico das taxas anuais ao longo das décadas

## Fechamento

Discuta com os colegas de bancada (trios) como poderíamos modelar a demografia da população

brasileira para incorporar o(s) problema(as) diagnosticado(os) e fazer previsões mais plausíveis. Anote uma proposta para ser discutida com a turma.

## Para Saber mais

- Gotelli, N. J. 2007. **Ecologia**. Planta, Londrina. *O capítulo 1 é uma introdução muito didática aos modelos de crescimento sem dependência da densidade.*
- Population dynamics from first principles. Capítulo 2 de **Complex Population Dynamics**. Peter Turchin, Princeton Univ Press, 2003. *Este texto instigante defende que o modelo de crescimento exponencial está para a biologia como as leis de Newton estão para a física.*
- Vandermeer, J. 2010. [How Populations Grow: The Exponential and Logistic Equations](#) **Nature Education Knowledge 3**(10):15. *Outro texto muito didático, com considerações sobre as consequências ambientais do crescimento populacional humano.*

[RCmdr, uma população, crescimento exponencial, tempo discreto, tempo contínuo](#)

1)

para prosseguir basta aceitar que a derivada é uma velocidade medida num intervalo muito pequeno, como a que você vê cada vez que olha para o velocímetro de um carro em uma viagem. Se quiser aprofundar-se veja o roteiro sobre [taxas, derivadas e função exponencial](#)

From:

<http://ecovirtual.ib.usp.br/> -

Permanent link:

[http://ecovirtual.ib.usp.br/doku.php?id=ecovirt:roteiro:den\\_ind:di\\_rcmdr&rev=1462875558](http://ecovirtual.ib.usp.br/doku.php?id=ecovirt:roteiro:den_ind:di_rcmdr&rev=1462875558) 

Last update: **2016/05/10 07:19**