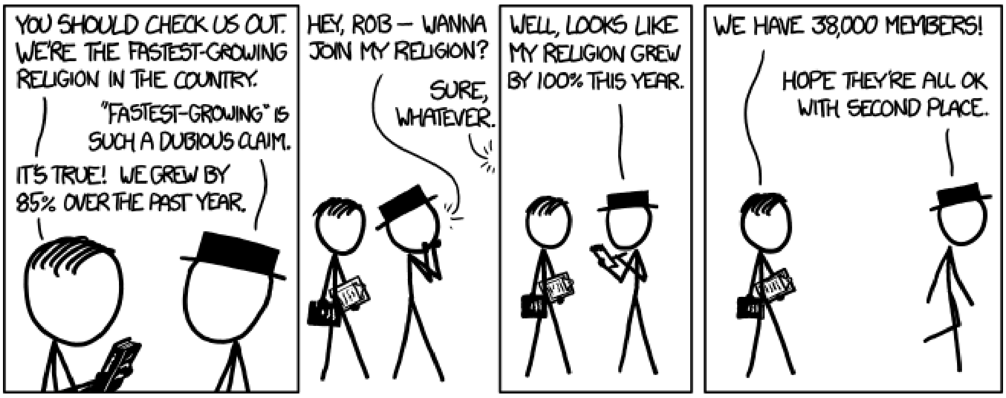
BASE

Taxas de crescimento e função exponencial



Este roteiro é uma demonstração informal dos principais passos de dedução do modelo de crescimento exponencial, a partir do modelo de crescimento a intervalos discretos. Você vai descobrir que a função exponencial é o limite de um crescimento discreto a uma taxa constante, quando fazemos os intervalos de tempo muito pequenos. Para isso, passaremos pelo conceito de derivadas e pela noção de limite de uma função.

Ao final, chegaremos a um dos primeiros princípios em ecologia: na ausência de forças externas, uma população biológica vai crescer ou descrescer exponencialmente. Infelizmente, juros também se comportam assim.

Do tempo discreto para o contínuo

Para muitos parece mais confortável pensar em mudanças no tamanho da população a intervalos discretos: contamos o número de indivíduos em um instante e no instante seguinte. O modelo geométrico descreve esta dinâmica, se a população cresce sem limites. O número de indivíduos no próximo intervalo de tempo, N_{t+1}, é igual ao número de indivíduos no tempo anterior N_t, multiplicado pela taxa de crescimento da população entre os dois intervalos, que chamamos λ:

$$N_{t+1} \ = \ \lambda N_t$$

Mas quanto esperamos entre uma contagem e outra? Se os nascimentos e mortes podem ocorrer a qualquer momento, devemos fazer censos a intervalos bem curtos. Mostraremos que o tempo contínuo é apenas uma outra maneira de pensar no tempo discreto: tornamos os intervalos tão pequenos quanto quisermos. Esse será nosso ponto de partida para deduzir o modelo de crescimento exponencial, com auxílio de algumas ferramentas computacionais.

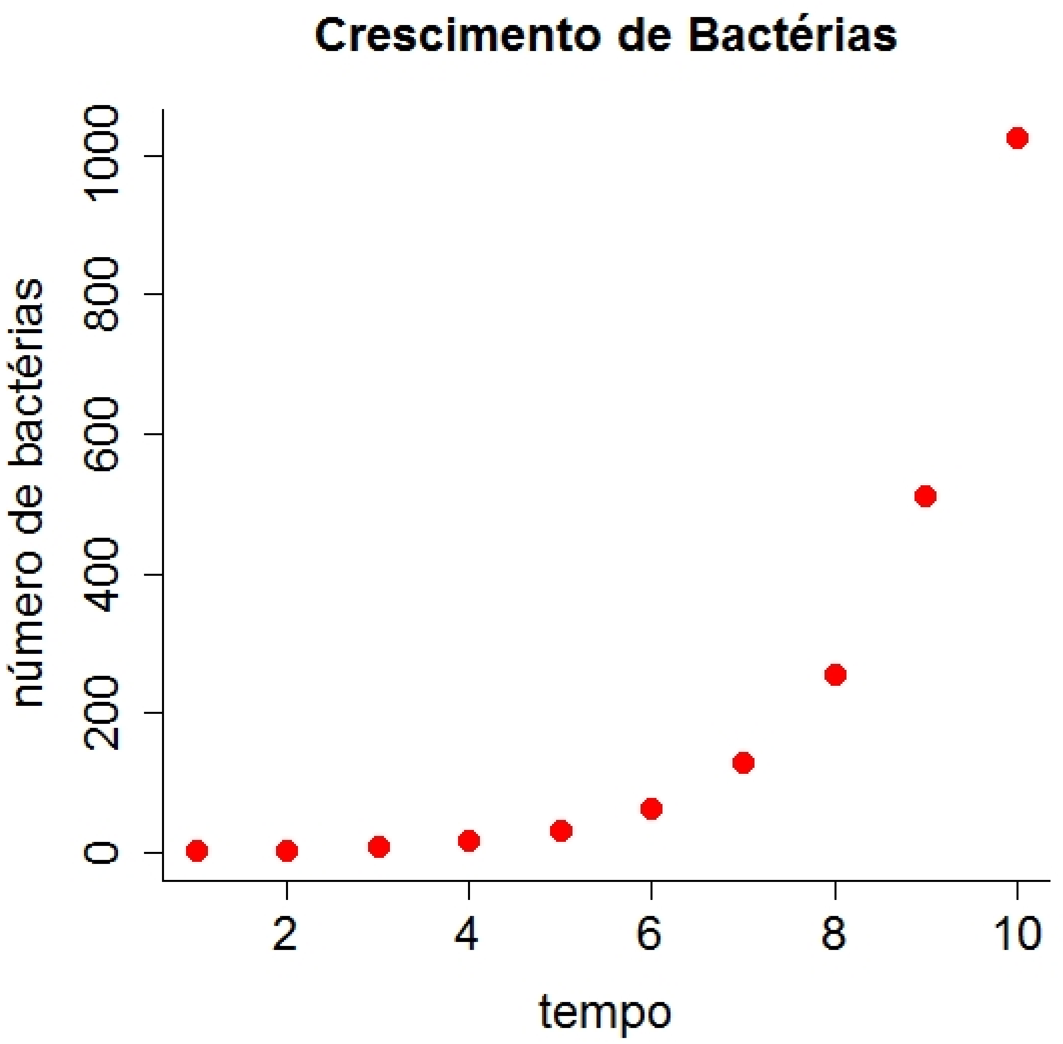
Tempo discreto

Vamos acompanhar o crescimento inicial e uma população e bactérias no vídeo [156]:

O que pode ser descrito pelo número de bactérias observadas a cada intervalo de tempo:

Tempo	No. de Bactérias
0	2
1	4
2	8
3	16
4	32
5	64
…	…
14	16384
…	…
30	1073741824
…	…
60	1152921504606846976

É difícil entender o que está acontecendo, apenas olhando essa tabela. Um gráfico pode ajudar.



continuacao tempo discreto

Pronto, vc. já simulou os dados do crescimento. Agora é só fazer o gráfico. Veja se consegue fazer parecido com o que apresentamos acima. Em seguida faça um outro gráfico com o tempo chegando a 20.

Note que o que temos é uma série temporal, que são registros do tamanho da população em certos instantes de tempo. Uma outra forma de descrever esse processo é saber:

- **Quão rápido cresce o número de bactérias** ou,
- **Qual a velocidade de crescimento das bactérias**

A noção de derivada

Para expressar o quanto a população variou em um dado período de tempo calculamos a taxa de variação da população no tempo t e após um intervalo Δt:

$$\text{Taxa de Variação}= \frac{{N(t + \Delta t) - N(t)}}{\Delta t} $$

Ou seja: tome os valores do número de bactérias em dois tempos próximos e divida pelo tempo decorrido entre uma observação e outra!

Entretanto o $ \Delta t $ é arbitrário. Se a população tem períodos reprodutivos bem definidos (p.ex. anuais), o intervalo de observação discreto é natural. Mas e se nascimentos e mortes podem ocorrer a qualquer momento? Quanto menores nossos intervalos de observação, mais precisa será a nossa descrição da dinâmica. Nestes casos parece uma boa ideia fazer o intervalo Δt ser o menor possivel, bem próximo de zero.

Mas se aproximamos Δt de zero, ${N(t + \Delta t) - N(t)}$ tenderia também a zero, já que os tamanhos populacionais nos dois momentos seriam muito parecidos. Portanto o resultado dessa taxa deve ser $0/0$ [157].

Vamos verificar se essa lógica está correta. Para começar, vamos supor uma população cujo tamanho é igual ao quadrado do tempo decorrido ($N(t)= t^2 $) [158]. Vamos então aplicar esta função para intervalos cada vez menores de tempo a partir de t=1, e ver o que acontece para a taxa de variação do tamanho populacional:

continua nocao de derivada

Ao contrário do que esperávamos, o valor da taxa converge para um número bem definido com a redução de Δt !

Repita o procedimento para outros valores tempo. Você deve encontrar este resultado:

t	${N(t + \Delta t) - N(t)} / {\Delta t} $
1	2
2	4

t	${N(t + \Delta t) - N(t)} / {\Delta t}$
3	6
4	8
5	10

Ou seja, a taxa instantânea de crescimento para t^2 tende a $2t$ à medida que Δt é reduzido. Podemos reduzir Δt o quanto quisermos, e este resultado fica cada vez mais exato. Encontramos a **derivada** da função $N(t)=t^2$!

Definição de uma derivada

A derivada de uma função $X(t)$ é sua taxa de variação instantânea, obtida pelo limite da taxa de variação:

$$\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

quando $\Delta t \to 0$ [159]. Uma das maneiras de representar uma derivada é na notação de uma taxa em relação ao tempo:

$$\frac{dX}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

Crescimento Exponencial

Uma maneira simples de pensar em derivadas é que elas são velocidades instantâneas [160]. Vamos então descobrir a expressão para a velocidade instantânea de crescimento da nossa população de bactérias:

Tempo	No. de Bactérias	Velocidade
0	2	
1	4	2
2	8	4
3	16	8
4	32	16
5	64	32

As bactérias duplicam-se a cada instante de tempo. Por isso, se a população dobrar, a sua velocidade de crescimento também dobra. Se ela quadruplicar, a velocidade quadruplicará, e assim por diante. Ou seja, *a velocidade de crescimento é proporcional ao tamanho da população*.

Já que estamos interessados em velocidades instantâneas, vamos representar esta proporcionalidade com uma derivada: \begin{equation} \frac{dN}{dt}= rN \label{dndt} \end{equation}

Em que a constante de proporcionalidade r é chamada taxa intrínseca de crescimento populacional, ou seja, o quanto cada indivíduo contribui instantaneamente para a variação no tamanho da população. Este é o modelo mais simples de crescimento populacional. O modelo é uma *equação diferencial*, pois estabelece uma igualdade entre a derivada de uma função (lado esquerdo) e alguma expressão algébrica, no lado direito da equação. Traduzindo em palavras, este modelo seria “*uma função do crescimento populacional* N *tem derivada proporcional a ela mesma*”. A função que tem esta propriedade, ou seja, que satisfaz esta equação é:

\begin{equation} \label{ert} N_t=N_0e^{rt} \end{equation}

Que é a função de crescimento populacional exponencial. Vamos ver como chegamos a isso!

Soluções de equações diferenciais

Uma equação diferencial de primeira ordem estabelece uma relação entre a derivada de uma função e alguma outra função matemática. Resolver uma equação destas é encontrar a função cuja derivada satisfaça a relação proposta.

O problema é que não há um algoritmo simples para fazer isso. Há muitas regras e tabelas que relacionam derivadas mais simples às suas respectivas funções (as antiderivadas). Além disso, em geral é preciso muita manipulação matemática para expressar a equação diferencial em termos destas formas catalogadas. Mesmo assim, nem sempre se chega a uma solução que pode ser expressa como uma função conhecida, o que chamamos de solução analítica. Felizmente, a equação diferencial ($\ref{dndt}$) é simples o bastante para ter solução analítica conhecida.

Melhor ainda, hoje há programas de computador que manipulam regras de matemática simbólica, incluindo as antiderivadas que precisamos para resolver equações diferenciais. São os *Sistemas de Álgebra Computacional*[161]. O Maxima é um desses programas, e pode nos ajudar a solucionar a equação diferencial. Vamos usá-lo *online*.

> As janelas de código abaixo executam o Maxima *online*: o código é enviado ao servidor Sage Cell, que tem o Maxima pronto para executar comandos. O servidor então retorna o resultado para nossa página.
>
> Se preferir, você pode instalar o Maxima em seu computador e executar os mesmos comandos. É uma ferramenta muito útil para resolver problemas matemáticos. Veja nossa Introdução ao Maxima.

Solução no Maxima

O comando abaixo define um objeto chamado `eq1` no Maxima, para armazenar a expressão simbólica da nossa equação diferencial $dN/dt=rN$. Clique no botão `Evaluate` para criar o objeto:

Agora use o comando `ode2` do Maxima para resolver a equação diferencial. O primeiro argumento é a equação diferencial, o segundo a variável dependente ($N(t)$) e o terceiro a variável independente (t):

O resultado deve ser:

$$ N(t)=c e^{rt} $$

Onde c é uma constante de integração desconhecida. A expressão acima satisfaz a equação diferencial, para qualquer valor de c, e isso é tudo que as regras de antiderivação podem nos dar.

Condições iniciais

Para ir adiante temos que dar algo mais: as condições iniciais do sistema. Vamos então definir o número inicial de indivíduos na população, N_0. Este é o tamanho da população no tempo zero, que substituímos na equação de crescimento exponencial:

$$N_0 = c*e^{0} = c*1 = c$$

Logo $c = N_0$, e finalmente temos nossa equação de crescimento exponencial:

$$ N_t= N_0 e^{rt} $$

A função exponencial

Satisfeito(a)? Espero que não, pois simplesmente apelamos para uma tabela de antiderivadas em um programa para encontrar a solução de nossa equação diferencial. Aprendemos a lógica geral da solução de uma equação diferencial, mas não porque a equação que propusemos tem esta solução específica.

Uma maneira de entender é retornar ao raciocínio de reduzir intervalos de tempo. Vamos começar com uma população que tem uma taxa de crescimento anual de $\lambda = 1,5$:

- $N_1=N_0 \lambda$, ou:
- $N_1=N_0 (1+ rd)$, onde *rd* = coeficiente discreto de crescimento
- $N_1= N_0(1 + 0,5)$

Agora, vamos supor que essa mesma população tenha dois ciclos reprodutivos anuais, portanto temos que calcular o aumento na população no primeiro semestre do ano, e multiplicar este valor novamente pela taxa de crescimento, para obter o tamanho da população no final do ano. Vamos supor que a taxa semestral de crescimento seja metade da anual:

$$N_1 \ = \ N_0 \left(1+\frac{0,5}{2} \right) \left(1+\frac{0,5}{2} \right)$$

Isso equivale a

$$N_1 \ = \ N_0 \left(1+\frac{0,5}{2} \right)^2 \ = \ N_0(1+0,25)^2 \ \to \frac{N_1}{N_0} \ = \ (1+0,25)^2 \ \simeq \ 1,56$$

Ops! Uma taxa de crescimento de 1,25 ao semestre resulta em um crescimento maior que a taxa anual de 1,5. Não é difícil entender: no segundo semestre a população aumentou em 25% de uma população que já cresceu 25% no primeiro semestre. Mantendo o raciocínio, trimestralmente a taxa seria de $(1 + 0.5/4)$ e deveria ser aplicada quatro vezes. Isso resultaria em um crescimento anual de cerca de 1,60. Onde isso vai parar?

Jacob Bernoulli foi o primeiro a solucionar este problema, preocupado com o comportamento de juros compostos, nos idos do século XVII. Ele partiu da expressão usada para calcular estes juros, que nada mais é que a generalização de nossa expressão de crescimento em um ano dividido em n intervalos, :

$$ \frac{N_1}{N_0}= \left(1+\frac{r_d}{n} \right) ^n $$

Em seguida ele notou que para calcular uma dívida (o tamanho da população em nosso caso) que aumenta a todo instante, teríamos que deixar o número de intervalos de tempo (n) cada vez maior, tendendo a um número infinitamente grande:

$$ \lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{r_d}{n} \right)^n$$

Isto é o mesmo que fazer os intervalos de tempo serem infinitamente pequenos. O que acontece então? Vamos tentar resolver o limite acima numericamente.Vamos aumentar o número de divisões dentro de um ano da nossa taxa de crescimento discreta. Usaremos $\lambda =2$, (portanto o $r_d=1$) e $N_0=2$.

continua função exponencial

Compare a taxa de crescimento N_t/N_0 com o valor de e^r, à medida que você aumenta o número de intervalos de tempo. Repita os cálculos para $\lambda =3$ e $\lambda =1,5$ (r=2 e r=0,5).

A esta altura você deve concordar que para o crescimento em um ano ($t=1$) dividido em n intervalos:

$$ \lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{r_d}{n} \right) ^n = e^r$$

Ou seja, para intervalos de tempo bem pequenos [162]:

$$\frac{N_t}{N_0}=e^{rt} $$ $$N_t= N_0 e^{rt}$$

Chegamos à equação de crescimento populacional contínuo. Além disso, chegamos à relação entre a taxa intrínseca de crescimento instantâneo e a taxa de crescimento discreto da população:

$$ \lambda = e^r $$ ou $$ r = \ln(\lambda)$$

Tempo de Duplicação

Tempo de duplicação [163] é definido como o tempo necessário para uma quantidade duplicar, dada uma taxa constante de crescimento. Podemos aplicar este conceito para o tempo necessário para que uma população com taxa constante de crescimento dobre de tamanho, ou para o tempo até que uma dívida sob taxa fixa de juros dobre de valor.

A solução da expressão de tempo de duplicação é simples. Dados o valor inicial (N_0), a taxa de crescimento r e o tamanho da população projetada ($2N_0$), resolvemos equação para o tempo:

$$2N_0 = N_0e^{rt}$$

Para isso precisamos de um pouco de álgebra apenas. Dividimos os dois lados da equação por N_0:

$$ e^{rt} = 2 $$

e em seguida tomamos o logarítmo em base natural dos dois lados da equação

$$ log(e^{rt}) = log(2) $$ $$ rt = log(2) $$ $$ t = \frac{log(2)}{r} $$

Como $log(2)$ é aproximadamente 0,7 [164], temos:

$$ t_{dupl} \approx \frac{0,7}{r} $$

Se a taxa de crescimento estiver expressa em percentual, como é comum para juros, temos :

$$ t_{dupl} \approx \frac{70}{r_{\%}} $$

Exercícios

Juros

Uma forma para calcular juros composto de um empréstimo [165] é através da equação exponencial, similar à apresentada acima, onde:

- r = juros
- N0 = valor emprestado
- Nt = valor final

Uma dívida

Você precisa de 1000 reais emprestados e suas opções em diferentes bancos são:

- 10% ao mês
- 50% ao ano
- 0,5% ao dia

1. Sabendo que só poderá pagar a dívida daqui a dois anos (à vista), calcule o valor

que irá desembolsar.
2. Calcule o tempo de duplicação para cada uma das taxas de juros acima.

Mais juros!

Um carro novo

Imagine que é bolsista PIBIC do Departamento de Ecologia da USP (tinha que ter algo de *ecologia* no exemplo!) e resolveu comprar um carro. Há duas opções que parecem caber no seu bolso de um carro básico (sem ar, direção e freios), ambos com parcela fixas:

1. valor à vista de R$ 27.000,00 com juros de 1,1% ao mês e pagamento após 100 meses
2. valor à vista de R$ 31.000,00 com juros de 0,7% ao mês e pagamento após 50 meses

- **Responda:**
    1. Qual o valor final do carro em cada uma das opções;
    2. o valor das prestações;
    3. quantos carros vc. estaria pagando em cada caso?
    4. qual o tempo de duplicação de cada opção?
    5. qual sua segunda opção de profissão?

Qualquer semelhança será mera coincidência

Segundo o físico Al Bartlett, uma das maiores tragédias da humanidade é a incapacidade de compreender as consequências de taxas de crescimento constantes. Sua palestra sobre o tema é um clássico, proferida mais de 1600 vezes! Nesta palestra o Prof Bartlett propõe o seguinte problema:

> Era uma vez uma civilização de bactérias que vivia em uma garrafa de um litro. A população crescia a uma taxa constante tal que o tempo de duplicação era de um dia. A população crescia e a civilização prosperava, até que a garrafa encheu. Nesse momento, metade das bactérias cessou a reprodução e partiu em busca de outra garrafa, para evitar um desastre demográfico. Assim que encontraram uma nova garrafa de um litro se instalaram e retomaram a mesma taxa de crescimento, tão aliviadas quanto as suas companheiras que ficaram na garrafa original, também crescendo à mesma taxa. Quanto tempo durará o alívio?

Para saber mais

- Do excelente site de ensino baseado em intuiçãoBetter Explained:
  - An Intuitive Guide To Exponential Functions & e
  - How to think with logs and exponents
- História do número e, do The MacTutor History of Mathematics archive, University St Andrews.
- Função exponencial na Wikipedia.
- Site do físico Al Bartlett. com excelente material sobre as consequências práticas do crescimento de populações e dívidas a taxas constantes.

R, maxima, calculo, uma população, crescimento exponencial, tempo discreto, tempo contínuo, equação diferencial

156) Caso o vídeo não esteja disponível na sua página entre nesse link

157) um horror matemático! Veja aqui

158) Este não é o modelo biologicamente mais adequado para crescimento de populações, mas é mais didático para entendermos derivação. Depois passaremos ao modelo de crescimento discreto, fique tranquilo(a)

159) o que se lê “quando Δt tende a zero”, ou seja, aproxima-se de zero tanto quanto você quiser.

160) o velocímetro de um carro mostra derivadas

161) em inglês CAS, Computer Algebra System

162) tão pequenos que aproximam o tempo instantâneo

163) veja: http://en.wikipedia.org/wiki/Doubling_time

164) com sete casas decimais = 0,6931472

165) esse exemplo é simplificado, em geral os juros são calculados pelo saldo e não pela dívida inicial