BASE

Dinâmica populacional denso-independente

Uma população em que as taxas de nascimento e mortalidade são constantes tem um crescimento ou decréscimo independente da densidade dela própria. Essa situação é geralmente relacionada à ausência de restrição ao crescimento, quando os recursos são ilimitados, mas pode também estar associada à extinção de populações.

Tempo discreto

Taxa de crescimento

Vamos imaginar agora uma população com taxas constante de crescimento e mortalidade e sem migrações. A população cresce ou é observada a intervalos regulares. O tamanho da população no próximo passo de tempo (N_{t+1}) é o número de indivíduos da geração anterior (N_t) mais o número de nascimentos (B), e menos o número mortes (D) no intervalo de tempo:

$$N_{t+1} = N_t + B - D $$

O número de mortes e nascimentos são resultado de taxas *per capita* multiplicadas pelo tamanho da população:

- $ B=bN_t $
- $ D=dN_t $

onde: b = taxa de nascimento *per capita* a cada geração ; d = taxa de mortalidade *per capita* a cada geração. Note que a taxa não muda com o tamanho da população, e que o número de nascimentos e mortes é proporcional ao tamanho populacional. Vamos apenas deixar claro mais uma premissa, para fins didáticos: os nascimentos e mortes ocorrem simultaneamente na população, no intervalo de tempo t. Podemos então dizer que :

- $N_{t+1} = N_t + bN_t-dN_t $
- $N_{t+1} = N_t + (b-d)N_t $

se definimos um fator de crescimento discreto: $r_d = b-d$

- $N_{t+1} = (1+r_d)N_t$
- $\frac{N_{t+1}}{N_t} = 1+r_d$

Como $ 1+r_d $ é uma constante, vamos designá-la como λ, um número positivo que expressa o aumento proporcional da população de uma geração a outra. Portanto:

$$ \lambda=\frac{N_{t+1}}{N_t} \implies N_{t+1} = \lambda N_t$$

Projeção da população em tempo discreto

Podemos então projetar a nossa população a cada passo de tempo t. Por exemplo:

Se uma população com 100 indivíduos tem uma taxa per capita de natalidade de 0,8/ano e de mortalidade de 0,75/ano, qual o tamanho esperado da população no próximo ano?

$$N_{t+1}=100 \times (1+0,8-0,75) = 100 \times 1,05 = 105$$

Podemos também projetar a população para outras gerações, usando iterações:

- $N_{t+2} = 105 \times 1,05 = 110,25$
- $N_{t+3} = 110,25 \times 1,05 = 115,7625$

prosseguindo e tomando o tamanho da população no tempo zero (N_0):

- $N_{t+4}= N_0 \times \lambda \times \lambda \times \lambda \times \lambda$
- $N_{t+4}= N_0 \lambda^4 $

Generalizando:

$$N_{t}=N_0 \lambda^t $$

Assim, para nosso exemplo a projeção para 10 intervalos de tempo é

$$100 \times {1,05}^{10} = 162,8895$$

Tempo contínuo

Com um pouco de manipulação algébrica a equação para tempo discreto

$$N_{t+1} \ = \ (1+r_d)N_t$$

Pode ser reescrita como

$$ N_{t+1} - N_t \ = \ \Delta N \ = \ r_dN_t $$

o que explicita que **a velocidade de crescimento $\Delta N = N_{t+1} - N_t$ é proporcional ao tamanho poulacional N_t**. Essa é característica essencial do crescimento populacional sem limites a uma taxa constante:

Omni vivo ex vivo

O fato básico da reprodução faz com que a variação do número de indivíduos de uma população no tempo seja proporcional ao número de indivíduos, em um ambiente constante.

A velocidade de crescimento é a variação no número de indivíduos ΔN dividida pelo tempo em que se deu esta variação, Δt. No modelo de tempo discreto $\Delta t = 1$, por definição. É um intervalo que pode ser tão grande como uma geração. Isso faz sentido se as mudanças no tamanho populacional se dão em intervalos discretos, como por exemplo em espécies semélparas com estação reprodutiva sincronizada.

No entanto, o tamanho populacionais da maioria das espécies varia continuamente. O cálculo diferencial foi criado para descrever esse tipo de dinâmica. Como o problema é que podem ocorrer mudanças a qualquer instante, o conceito-chave aqui é o de *taxa instantânea*, ou derivada.

Taxa instantânea de crescimento

Se nascimentos e mortes podem acontecer a todo momento, faz mais sentido pensarmos em uma velocidade instantânea do tamanho populacional. Isto equivale a reduzir Δt tanto que pode ser considerado um instante. Esta velocidade instantânea é a *derivada* do tamanho populacional, que representamos com ${dN}/{dt}$, para diferenciar da velocidade a intervalos grandes e arbitrários $\Delta N/\Delta t$ [1].

Agora podemos expressar que velocidade instantânea de uma população é proporcional ao tamanho populacional com a equação:

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Que é o modelo de crescimento populacional a taxa constante em tempo contínuo. O parâmetro r é chamado *taxa instântanea de crescimento per capita*. Essa taxa r expressa o número médio de filhotes que cada indivíduo da população produz num intervalo de tempo muito curto. Por isso, muito livros de ecologia indicam que a unidade de r é indivíduos/indivíduo.tempo. Físicos e matemáticos são mais rigorosos e lembram que a expressão correta da unidade é 1/tempo.

Projeção da população em tempo contínuo

Para prever o tamanho de uma população que cresce a uma taxa constante em tempo contínuo usamos a equação

$$N(t) = N_0e^{rt}$$

E a relação entre a taxa de crescimento instantânea e a taxa de crescimento do modelo discreto é

$$ r \ = \ ln(\lambda)$$

Por que? Por que? Por que?

As duas equações acima são deduzidas da equação $dN/dt=rN$ com técnicas de cálculo numérico. Se quiser entender um pouco mais sobre isso veja o roteiro sobre taxas, derivadas e função exponencial.

Simulando crescimento denso-independente

Parâmetros

Os parâmetros da nossa função de crescimento denso-independente são:

Opção	parâmetro	definição
`Enter name for last simulation data set`	objeto no R	nome para salvar os resultados da simulação em um objeto no R
`Maximum time`	tmax	número de interações
`Interval time size`	intt	divisões do intervalo de tempo para o modelo discreto
`Initial population size`	N0	tamanho inicial da população
`Population growth rate (lambda)`	lambda	taxa de crescimento do modelo discreto

Gráfico resultante da função

O resultado da função será um gráfico com o tamanho da população em função do tempo previstos pelos modelos. Os pontos azuis indicam os tamanhos populacionais previstos pelo modelo de crescimento em tempo discreto:

$$N_t = N_0\lambda^t$$

usando os valores de N_0 e λ da caixa de opções. A linha preta indica os tamanhos populacionais previstos pelo modelo de crescimento em tempo contínuo:

$$N(t) = N_0e^{rt}$$

usando os mesmos valores de parâmetros. Para isso, o λ é usado para calcular a taxa de crescimento instantânea *per capita* correspondente do modelo contínuo pela relação:

$$r=\ln(\lambda)$$

Os valores para o modelo discreto são pontos, porque este modelo prevê o tamanho da população a intervalos discretos. Já o modelo em tempo contínuo prevê o tamanho da população a qualquer momento, e por isso é representado por uma linha contínua.

Os pontos se sobrepõem à linha porque o **EcoVirtual** usa taxas de crescimento equivalentes para tornar as projeções comparáveis. Abaixo do eixo X do gráfico está o valor de λ e de r usados na simulação.

Exercícios: brincando nos campos do senhor

Em suas memoráveis aulas de dinâmica de populações, o físico Roberto Kraenkel costuma dizer que não sabe se o paraíso existe, mas em caso afirmativo sabe que só lá as populações crescem sem limites. Apesar disso, prossegue, os modelos para este tipo de crescimento são essenciais para entender a dinâmica de populações reais, assim como a irrealista primeira lei de Newton é essencial para entender o movimento dos corpos no espaço.

Então vamos usar o **EcoVirtual** para explorar o comportamento dos modelos de crescimento a taxas constantes!

Varie a taxa de crescimento

Experimente diferentes valores da taxa de crescimento discreto λ com a opção `Population growth rate (lambda)`. Isso vai alterar também a taxa de crescimento contínuo r. Veja o efeito no gráfico e use uma calculadora para conferir a correspondência entre as duas taxas, indicadas abaixo do eixo X do gráfico.

Pergunta

Qual valor ou intervalos de valores de λ e de r sob o quais a população:

1. cresce ?
2. descresce ?
3. permanece estável ?

Varie o intervalo no modelo discreto

O parâmetro `Interval time size (intt)` define um novo intervalo de tempo para o modelo de tempo discreto. O novo valor de intervalo é uma fração do original de valor um. Assim, se você escolher 0.5 para esta opção as projeções do modelo discreto são recalculadas para intervalos que correspondem à metade do intervalo original. Por isso, você verá no gráfico pontos azuis a cada meia unidade de tempo. Alterando o intervalo para 0.25 você terá projeções para intervalos que são um quarto da unidade original, e o gráfico terá pontos a cada 0,25 unidade de tempo.

Note que à medida que você diminui o intervalo de tempo do modelo discreto os pontos se aproximam, até que parecem formar uma linha contínua. Ou seja, a projeção a intervalos discretos tende à projeção em tempo contínuo à medida que os intervalos são reduzidos!

De fato, o modelo exponencial pode ser visto como um limite do modelo discreto. Os detalhes estão no já indicado roteiro taxas, derivadas e função exponencial. Mas para que isso funcione o **EcoVirtual** recalcula o valor de λ e o correspondente r para cada novo intervalo de tempo discreto. E aqui vai nossa pergunta: como são feitos estes cálculos? Mais precisamente:

Pergunta

Dado uma razão de crescimento discreto para um intervalo de tempo de valor de uma unidade, $$\lambda_1=\frac{N_{t+1}}{N_t}$$

como calcular a razão de crescimento para um intervalo fracionário

$$\lambda_{1/n}=\frac{N_{t+{1/n}}}{N_t}$$

de modo que ao final de uma unidade de tempo a razão de crescimento permaneça λ_1? Verifique sua solução contra os valores que o **EcoVirtual** retorna quando você reduz o intervalo de tempo discreto pela metade (intt=0.5).

duas dicas

1. Uma solução passa por lembrar que o λ não tem unidade de tempo, pois é uma razão entre dois tamanhos populacionais. Portanto ele não pode ser reescalonado diretamente para a nova unidade de tempo. Já o r tem escala de tempo: uma taxa de $r=1$ indivíduo/indivíduo.semana equivale a $r=1/7$indivíduo/indivíduo.dia.
2. Outra maneira de pensar no problema é lembrar que o crescimento discreto em uma unidade original de tempo à taxa unitária é de λ_1 e na taxa fracionária é de $\lambda_{1/n}^n$. A solução do problema é fazer essas duas quantidades iguais.

Exercícios extra : Cresce BRASIL

Esse exercício utiliza os dados de censos do IBGE para modelar e fazer predições sobre o crescimento da população brasileira. Antes de seguir ao link abaixo, baixe os arquivos de dados necessários:

1. censo90.csv
2. censodecadas.csv}}preservefilenames:autofilled:censoDecadas.csv

Siga para o roteiro do exercício no link abaixo:

- Exercícios IBGE - Brasil

Para abrir o exercício direto no seu computador (offline) utilize o arquivo:

- censo.zip, descompacte-o e abra o arquivo .html no seu navegador.

Para Saber mais

- Gotelli, N. J. 2007. **Ecologia**. Planta, Londrina. *O capítulo 1 é uma introdução muito didática aos modelos de crescimento sem dependência da densidade.*
- Population dynamics from first principles. Capítulo 2 de **Complex Population Dynamics**. Peter Turchin, Princeton Univ Press, 2003. *Este texto instigante defende que o modelo de crescimento exponencial está para a biologia como as leis de Newton estão para a física.*
- Vandermeer, J. 2010. How Populations Grow: The Exponential and Logistic Equations **Nature Education Knowledge 3**(10):15. *Outro texto muito didático, com considerações sobre as consequências ambientais do crescimento populacional humano*.

1)
para prosseguir basta aceitar que a derivada é uma velocidade medida num intervalo muito pequeno, como a que você vê cada vez que olha para o velocímetro de um carro em uma viagem. Se quiser aprofundar-se veja o roteiro sobre taxas, derivadas e função exponencial